admisión 24

# GUÍA BUAP

## NIVEL SUPERIOR EGA-I y EGAV-I

## EGA AVANZADA

# ÍNDICE

PRESENTACIÓN ........................................ 3

LENGUAJE Y PENSAMIENTO
MATEMÁTICO ........................................... 4

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO
Y RAZONAMIENTO VARIACIONAL ......... 79

ESTADÍSTICA Y TOMA DE
DECISIONES RAZONADAS ....................... 108

RAZONAMIENTO DEL LENGUAJE
Y LA COMUNICACIÓN ............................ 138

DESPEDIDA .............................................. 182

# PRESENTACIÓN

**DESCRIPCIÓN DEL EXAMEN**

El Examen General de Admisión I (EGA-I) y el Examen General de Admisión Virtual (EGAV-I) son un examen que busca evaluar las diferentes habilidades del pensamiento, desde el procesamiento de la información hasta los conceptos y herramientas adquiridas durante la trayectoria académica en el Nivel Medio Superior. El objetivo del EGA-I y EGAV-I es obtener información relevante sobre las habilidades y conocimientos de los aspirantes para llevar a cabo una evaluación justa y transparente para el ingreso a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

**ESTRUCTURA DEL EXAMEN**

Los contenidos de ambos exámenes son los mismos, solo cambia el formato de aplicación de examen. Cada reactivo o pregunta dentro del EGA-I y el EGAV-I es de opción múltiple, con cuatro opciones de respuesta, de las cuales una representa la respuesta correcta. La duración total del EGA-I y el EGAV-I es de 160 minutos (2 horas Y 40 minutos).

| Componente del EGA - I y EGAV - I | Número de Preguntas | Tiempo de la Componente (minutos) |
|---|---|---|
| Razonamiento del Lenguaje y la Comunicación | 60 | 60 |
| Razonamiento Matemático | 50 | 50 |
| Pensamiento Crítico, Habilidades Cognitivas y Habilidades Blandas | 20 | 20 |
| Lengua Extranjera - Inglés | 30 | 30 |
| **TOTAL** | **160** | **160** |

**CURSO DE PREPARACIÓN**

Dentro de la plataforma www.seminarioega.com (a partir del día 15 de Abril) podrás acceder a tu curso de Admisión BUAP 2024, donde profesores expertos en su área abordarán el temario del EGA-I y el EGAV-I a través de de una serie de videos pre-grabados. Para acceder a tu curso de preparación solo deberás iniciar sesión a partir de la fecha indicada e ingresar en la pestaña "Mi curso".

Por otro lado, la guía EGA Avanzada 2024 desarrolla cada uno de los temas presentes en el examen de admisión (a excepción de la materia de Inglés, ya que esta no influye en el puntaje final), presentando ejemplos con explicaciones de los diferentes tipos de ejercicios. Sin embargo, para poner en práctica los conocimientos adquiridos en esta guía y a lo largo de tu trayectoria escolar será necesario contestar los exámenes de simulación a los que tienes acceso dentro de la plataforma.

Para acceder a los exámenes debes iniciar sesión en la plataforma y acceder a la pestaña "Mis exámenes". Una vez dentro, podrás autoevaluarte al responder cinco exámenes de simulación con características muy similares al examen que responderás en el proceso de admisión para el ingreso a alguna licenciatura de la BUAP. Al finalizar cada examen se genera un reporte con los resultados, que te permitirán conocer tu avance en el dominio de los temas y aquellos que debes dedicar más tiempo de estudio.

# LENGUAJE Y PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Aspirante, te recordamos que la guía 2024 no contiene ejercicios, si deseas resolver ejercicios puedes hacerlo dentro de tu cuenta de www.seminarioega.com

## FUNDAMENTOS DEL LENGUAJE EN MATEMÁTICAS

En general toda área de trabajo, de acción o del conocimiento tiene un lenguaje propio. Dependiendo del área, este lenguaje puede ser muy especializado o de uso cotidiano; de esa manera tenemos un tipo de lenguaje relacionado a la medicina, otro en el área de la química, uno más en alguna especialidad deportiva, etc. El manejo correcto del lenguaje, en el área correspondiente, nos permitirá desempeñarnos en forma correcta; por el contrario, si desconocemos el significado de cierta expresión nos veremos limitados en la realización de cualquier acción que implique tal expresión.

Matemáticas es un área del conocimiento muy importante y tiene su propio lenguaje. A partir de él podemos describir en forma precisa algún problema, alguna operación, alguna propiedad o algún concepto. En el lenguaje matemático encontraremos una importante diversidad de símbolos cuyo significado es trascendental en la solución de problemas; los símbolos pueden representar un concepto, una operación o una fórmula. También encontraremos palabras que representan alguna idea precisa y su desconocimiento impide la comprensión de la misma.
Entre la gran diversidad de expresiones o símbolos matemáticos que se usan en esta área podemos tener, por ejemplo, los siguientes.

| | |
|---|---|
| El doble de un número: | 2a |
| La mitad de un número: | $\frac{a}{2}$ |
| La suma de dos números cualesquiera: | a + b |
| El cuadrado de un número: | $a^2$ |
| El cubo de la diferencia de un binomio: | $(a- b)^3$ |
| x es menor que y: | $x < y$ |
| Valor absoluto de m: | $\|m\|$ |
| Un número mayor o igual a cero: | $a \geq 0$ |
| El triple de un número más cuatro es igual a 16: | 3m + 4 = 16 |
| El producto de dos número es igual al primero de ellos más dos: | xy = x + 2 |
| La derivada de la función sen x respecto a x: | $\frac{d\ senx}{dx}$ |

Debemos reconocer el significado preciso de palabras de uso común, en matemáticas, para poder entender a qué nos referimos, por ejemplo: área, volumen, raíz cuadrada, potencia, base, perímetro, factorización, etc.
Es recomendable conocer y dominar el lenguaje matemático para poder entender esta área del conocimiento, de otra manera nos veremos imposibilitados a resolver múltiples problemas que también se presentan en la vida cotidiana.

### Ejemplo.

1.- La suma de las puntuaciones de Luis y Javier en un examen es de 124. Si la calificación de Luis es el triple de la calificación de Javier, ¿cuántos puntos tuvo Luis?

Para resolver este problema debemos traducir la expresión en lenguaje matemático.

L + J = 124

Pero L = 3J

Sustituyendo 3J + J = 124

4J = 124

Despejando J

J = 124 / 4

J = 31

La puntuación de Javier es 31.

Finalmente calculamos la puntuación de Luis que es el triple de la puntuación de Javier, es decir:

L = 93

Observamos que ambas puntuaciones suman 124.

2.- Paula ganó hoy cierta cantidad de dinero. Si durante quince días logra ganar la misma cantidad, habrá ganado $3750. ¿Cuál es dicha cantidad?

Para resolver este problema debemos traducir la expresión en lenguaje matemático.

Sea x la cantidad que ganó Paula hoy.

Durante quince días gana lo mismo y obtiene $3750, es decir:

15x = 3750

Despejando el valor de x tenemos

$$x = \frac{3750}{15}$$

Finalmente dividimos para obtener la cantidad diaria que Paula ganó: $ 250

3.- Encuentra la expresión algebraica que representa el siguiente enunciado "El cuadrado de un número más el doble de dicho número es igual al triple del número indicado más 2"

Solo debemos traducir la expresión en lenguaje matemático.

Representamos al número como x y analizamos con cuidado la expresión para obtener lo siguiente:

$$x^2 + 2x = 3x + 2$$

## ÁLGEBRA ELEMENTAL

El álgebra es la parte de las matemáticas que generaliza a la aritmética y, además, interpreta problemas cotidianos en su lenguaje con la intención de poder resolverlos.
Dentro del álgebra existen varios conceptos importantes que debemos recordar.

- Constantes.- Son todos los valores numéricos de una expresión.

Por ejemplo: 5, – 6, $\frac{7}{8}$, 34, etc.

- Literales.- Son todos los valores que aparecen como letras en la expresión.

Por ejemplo: x, y, z, a, b, c, m, n, etc.

- Término algebraico.- Es aquel formado por constantes y literales unidas a partir de operaciones de producto, división y potencia.

Por ejemplo: 7xy, $\frac{9}{12}abc$, $-4x^2yz$, $8x^3y^2$, etc.

- Expresión algebraica.- Es aquella que se encuentra formada por constantes y literales unidos por diversas operaciones.

Por ejemplo: $6x^2y + 25x^3y + 13xy - 12x^4y + 10x^7y$

- Monomio.- Es aquella expresión algebraica formada por un solo término.

Por ejemplo: $25x^3y$, 13xy, $12x^2y$ etc.

- Binomio.- Es aquella expresión algebraica formada por dos términos.

Por ejemplo: $3xy - 8x$, $5x - 6yx$, $6x^2y + 25x^3y$, etc.

- Trinomio.- Es aquella expresión algebraica formada por tres términos.

Por ejemplo: $15x^2y - 18x^2y^2 + 24xy^2$

- Polinomio.- Aquella expresión algebraica formada por muchos términos.

Por ejemplo: $-18x^2y^2 + 24xy^2 - 40x^2 + 48x^2y - 64xy$

- Coeficiente numérico.- Es la constante que multiplica o divide a un término algebraico.

Por ejemplo: en la expresión $15x^2y$, el coeficiente numérico es 15.

- Exponente.- Es el número pequeño que se ubica en la parte superior de una literal.

Por ejemplo: en $15x^2y^3$, el exponente de x es 2 mientras que el exponente de y es 3.

- Términos semejantes.- Son aquellos que tienen la misma parte literal pero diferente coeficiente numérico.

Por ejemplo: 7xy, 9xy, – 2xy, – 8xy, 15xy son términos semejantes.

Ejemplos.

1) "El doble de un número menos el cuadrado del mismo número es igual a 10"

Elegimos al número como "a" e interpretamos la expresión indicada:

$$2a - a^2 = 10$$

2) "las edades de Juan y María suman 75 años"

Las literales elegidas serán J y M e interpretamos la expresión indicada:

$$J + M = 75$$

3) "El triple del cuadrado de un número cualquiera más dos es igual al doble de la diferencia del mismo número con uno"

Elegimos al número como "x" e interpretamos la expresión indicada:

$$3(x+2)^2 = 2(x-1)$$

## EXPONENTES.

En algunas operaciones se puede presentar el producto sucesivo de un número con el mismo, por ejemplo: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

Para simplificar este tipo de productos, y en general de operaciones, usamos exponentes.

El producto anterior se representa de la siguiente manera:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

Donde la base es el número que se multiplica por sí mismo, en este caso el 2, y el exponente, que es el 5, representa la cantidad de veces que se multiplica la base.

Por transitividad tenemos que $2^5 = 32$

Consideremos otros ejemplos:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$$
$$a \times a \times a = a^3$$

Los exponentes se pueden presentar en diversas operaciones y para aplicarlos correctamente utilizamos las siguientes leyes:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^m = a^m b^m$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$
6. $a^0 = 1$
7. $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
8. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Es importante destacar que un número negativo elevado a una potencia par se convierte en positivo mientras que si se eleva a una potencia impar quedará negativo.

Ejemplos.

1) $(-1)^2 = 1;\ (-1)^3 = -1;\ (-1)^4 = 1;\ (-1)^5 = -1$
2) $(-2)^2 = 4;\ (-2)^3 = -8;\ (-2)^4 = 16;\ (-2)^5 = -32$

3) El resultado de simplificar la expresión $\dfrac{4 \cdot 4^7}{4^3}$ es:

Aplicamos leyes de exponentes $\dfrac{4 \cdot 4^7}{4^3} = \dfrac{4^8}{4^3} = 4^5$

4) El resultado de simplificar la expresión $\dfrac{5^6 \cdot 8^2 \cdot 5^4 \cdot 8^5}{8^3 \cdot 5^4}$ es:

Aplicamos leyes de exponentes $\dfrac{5^6 \cdot 8^2 \cdot 5^4 \cdot 8^5}{8^3 \cdot 5^4} = \dfrac{5^{10} 8^7}{5^4 8^3} = 5^6 8^4$

5) El valor que se obtiene al simplificar $\dfrac{2^6 3^7}{2^3 3^5}$ es:

Aplicamos leyes de exponentes $\frac{2^6 3^7}{2^3 3^5} = 2^3 3^2 = 8 \times 9 = 72$

## EVALUACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Evaluar una expresión algebraica significa sustituir los valores dados de las variables para hallar el valor numérico de la expresión. Toda expresión algebraica puede ser evaluada con diversos valores numéricos.

Ejemplos.

1) Si se evalúan los valores de s = 5 y t = – 3 en la expresión $\sqrt{s^2} - 4t$, se tiene que:

$$\sqrt{s^2} - 4t = \sqrt{5^2} - 4(-3) = 5 + 12 = 17$$

2) Indica si –1 es el número solución de la ecuación $2x^2 + x - 1 = 0$

$$2(-1)^2 + (-1) - 1 = 0$$
$$2(1) - 2 = 0$$
$$0 = 0$$

Efectivamente – 1 es la solución.

## OPERACIONES ALGEBRAICAS.

Dentro del álgebra se mantienen las cuatro operaciones aritméticas básicas por lo que tenemos: suma, resta, producto y división algebraica.
Cada una de estas operaciones tiene sus reglas y generalmente se clasifican de acuerdo al tipo de expresión que se tiene. *La suma y resta algebraica* tienen procesos de solución muy parecidos.

Para realizar una suma o resta algebraica tomamos en cuenta dos diferentes casos:

Suma y resta de monomios.
Suma y resta de polinomios

Hablamos de suma o resta de monomios cuando tenemos siempre términos semejantes y consecuentemente deberemos trabajar solo los coeficientes numéricos, es decir, en la suma o resta de monomios debemos mantener la parte literal y operar los coeficientes numéricos.
Esta operación será la base de la suma y resta de polinomios.
En la suma o resta de polinomios, ordenamos por columnas de términos semejantes y simplificamos cada columna como suma de monomios. Si existiera un término que no es semejante a las columnas ya establecidas, se deberá agregar otra nueva columna en cualquiera de los extremos.

### Ejemplos.

1) Sumar $7xy$, $9xy$, $-4xy$, $-8xy$, $15xy$

En este caso bastará sumar (y restar) los coeficientes numéricos
Tenemos entonces:

$$7xy + 9xy - 4xy - 8xy + 15xy = (7 + 9 - 4 - 8 + 15)xy = 19xy$$

2) Sumar los polinomios: $5xy^2 + 7x + 8y^4$;   $6xy^2 - 6x - 2y^4$;   $2x - 4y^3 + 5xy^2$

En este caso debemos ordenar por columnas de términos semejantes y se suman (restan) los coeficientes numéricos. Los términos que aún no tienen columna se agregan en una columna nueva:

$$\begin{array}{rrrr} 5xy^2 & + 7x & + 8y^4 & \\ 6xy^2 & - 6x & - 2y^4 & \\ \underline{5xy^2} & \underline{+ 2x} & \underline{\phantom{+ 6y^4}} & \underline{- 4y^3} \\ 16xy^2 & + 3x & + 6y^4 & - 4y^3 \end{array}$$

3) Restar: $(2x^2y^2 + 3xy^2 + 4xy) – (25x^2y^2 –16xy^2 + 19xy)$

Ordenamos los polinomios por columnas de términos semejantes, cambiando el signo del polinomio sustraendo.

$$\begin{array}{r} 2x^2y^2 + \ \ 3xy^2 + \ \ 4xy \\ \underline{-\,25x^2y^2 + 16xy^2 - 19xy} \\ -\,23x^2y^2 + 19xy^2 - 15xy \end{array}$$

*El producto algebraico* se lleva a cabo considerando las siguientes reglas:

1. Se multiplican los signos.
2. Se multiplican los coeficientes.
3. Se multiplica la parte literal (los exponentes se suman).
4. Se multiplican término a término los elementos de los polinomios.

Ejemplos.

1) Multiplica $(8x^2y^3)(–2x^2y^2)(3y^3z^2)$

Aplicando las reglas indicadas tendremos:

Para los signos : –
Para los coeficientes: 48
Para la parte literal : $x^4y^8z^2$

Es decir: $(8x^2y^3)(–2x^2y^2)(3y^3z^2) = – 48x^4y^8z^2$

2) Multiplica los polinomios: $(3xy – 8x)(5x – 6xy + 8y)$

El proceso lo detallamos de la siguiente manera:
Multiplicamos $(3xy)\ (5x –6xy + 8y)$
Y además $(–8x)\ (5x –6xy + 8y)$

Los resultados se expresan directamente así:
$(3xy – 8x)(5x – 6xy + 8y) = 15x^2y –18x^2y^2 +24xy^2 – 40x^2 +48x^2y – 64xy$

Debemos simplificar términos semejantes:
$(3xy – 8x)(5x – 6yx + 8y) = 63x^2y –18x^2y^2 + 24xy^2 – 40x^2 – 64xy$

3) Un triángulo rectángulo tiene un cateto expresado como $2x + 3$ y el otro por $4x - 2$. ¿Cuál será la expresión algebraica de su área?

Sabemos que el área de un triángulo es $A = \frac{b \cdot a}{2}$ y en este caso la base y la altura corresponden a los catetos.
El área será

$$A = \frac{(2x+3)(4x-2)}{2} = \frac{8x^2+8x-6}{2} = 4x^2+4x-3$$

*La división algebraica* se puede clasificar en tres diferentes casos que son los siguientes:
1. División de monomios.
2. División de polinomio entre monomio.
3. División de polinomios.

Para los dos primeros casos consideramos las siguientes reglas:
1. Se dividen los signos.
2. Se dividen los coeficientes. Si la división no es exacta puede quedar indicada como numero racional.
3. Se divide la parte literal (los exponentes se restan).
4. Se divide término a término en caso de existir polinomio.

Para el caso de división entre dos polinomios debemos considerar un proceso totalmente distinto que incluye a todas las operaciones anteriores, es decir suma, resta, producto y división de monomios. Los polinomios a dividir deben estar ordenados en forma decreciente.

Ejemplos.

1) Divide $(16x^6y^9z) / (-4x^2y^3)$

Aplicando las reglas indicadas tendremos:

Para los signos : –
Para los coeficientes: 4
Para la parte literal : $x^4y^6z$

Es decir: $(16x^6y^9z) / (-4x^2y^3) = -4x^4y^6z$

2) Divide el polinomio entre el monomio: $\frac{15x^6y^4z^8 - 18x^8y^7z^3 + 24x^9y^{10}z - 40xyz^4}{3x^2y^4z}$

Debemos dividir cada término del polinomio entre el monomio para obtener los resultados en forma independiente aplicando las reglas respectivas.
Los resultados se expresan directamente así:

$$\frac{15x^6y^4z^8 - 18x^8y^7z^3 + 24x^9y^{10}z - 40xyz^4}{3x^2y^4z} = 5x^4z^7 - 6x^6y^3z^2 + 8x^7y^6 - \frac{40}{3}x^{-1}y^{-3}z^3$$

## APLICACIONES DEL ÁLGEBRA

### ECUACIONES.

Una ecuación es un caso particular de igualdad que se cumple para cierta cantidad de valores.
De acuerdo al teorema fundamental del álgebra, una ecuación de primer grado tiene una solución; una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones; una ecuación de tercer grado tiene tres soluciones y así sucesivamente.

El grado de una ecuación se puede obtener del máximo exponente de su variable. Para resolver una ecuación utilizamos las propiedades de la igualdad, que resumimos de la siguiente forma:

*En una igualdad, todo término que se traspone lo hace con operación contraria.*

Ejemplos.

1) Resolver la ecuación: $5x + 6 = 0$

Debemos despejar x

El 6 que suma se traspone restando $5x = -6$

El 5 que multiplica se traspone dividiendo

$$x = -\frac{6}{5}$$

2) Resolver la ecuación: $10x + 3 = 4x + 15$

Agrupamos términos semejantes.

$$10x - 4x = 15 - 3$$

Simplificamos.

$$6x = 12$$

Despejamos.

$$x = \frac{12}{6}$$

Es decir.

$$x = 2$$

3) Resolver la ecuación: $7x + 2 - 2x + 10 = x + 5 - 4x + 17$

Simplificamos términos semejantes en cada parte de la igualdad.

$$5x + 12 = -3x + 22$$

Agrupamos términos semejantes.

$$5x + 3x = 22 - 12$$

Simplificamos.

$$8x = 10$$

Despejamos.

$$x = \frac{10}{8}$$

4) Resolver la ecuación: $\frac{8}{a+4} = 5$

El denominador que divide se traspone multiplicando.

$$8 = (5)(a + 4)$$

Multiplicamos.

$$8 = 5a + 20$$

Agrupamos términos.

$$8 - 20 = 5a$$

Despejamos la variable.

$$-\frac{12}{5} = a$$

5) Resolver la ecuación: $x^2 - 25 = 0$

Despejamos.

$$x^2 = 25$$

Obtenemos la raíz cuadrada.

$x = \pm\sqrt{25}$
$x = \pm 5$
Entonces $x_1 = 5$
Entonces $x_2 = -5$

6) Resolver la ecuación: $m^2 - 3m = 10$

Reordenamos la ecuación.

$$m^2 - 3m - 10 = 0$$

Factorizamos.

$$(m - 5)(m + 2) = 0$$

Igualamos cada factor con cero para encontrar cada una de las dos soluciones.

$m - 5 = 0$ Entonces $m_1 = 5$
$m + 2 = 0$ Entonces $m_2 = -2$

7) Resolver la ecuación: $2x^2 + 5x + 2 = 0$

Recordamos la formula general para ecuaciones de segundo grado.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este caso $a = 2$, $b = 5$ y $c = 2$
Sustituimos los valores dados.

$$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

Las soluciones son:

$$x_1 = \frac{-5 + 3}{4} = -\frac{2}{4}$$

$$x_2 = \frac{-5 - 3}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

8) Resolver la ecuación: $b^3 = 4b^2$

Agrupamos la variable respetando las propiedades de la igualdad.

$$\frac{b^3}{b^2} = 4$$

Simplificamos utilizando leyes de exponentes.

$$b = 4$$

## VALOR ABSOLUTO.

Podemos entender el valor absoluto de un número como la distancia de dicho número al origen en una recta numérica. Como la distancia siempre es positiva entonces el valor absoluto siempre será positivo.
Formalmente definimos al valor absoluto de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a \; si \; a > 0 \\ -a \; si \; a < 0 \end{cases}$$

Dentro de la definición formal podemos notar que el valor absoluto de un número siempre será positivo.

Ejemplos.

1) $|8| = 8$

2) $|-3| = -(-3) = 3$

3) $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

## ECUACIONES Y VALOR ABSOLUTO.

En ocasiones tenemos una incógnita dentro de un valor absoluto y debemos hallar su valor. Para hacerlo debemos igualar la expresión, dentro del valor absoluto, con el resultado tanto positivo como negativo y resolver la ecuación resultante.

Ejemplos.

1) Hallar los valores de x que cumplen la expresión $|x - 4| = 8$

Igualamos con el valor positivo y negativo.

$$x - 4 = 8 \quad \text{y} \quad x - 4 = -8$$

Resolvemos cada ecuación.

$$x = 8 + 4 \quad \text{y} \quad x = -8 + 4$$
$$x = 12 \quad \text{y} \quad x = -4$$

2) Hallar los valores de x que cumplen la expresión $|2x + 3| = 12$

Igualamos con el valor positivo y negativo.

$$2x + 3 = -12 \quad \text{y} \quad 2x + 3 = 12$$

Resolvemos cada ecuación.

$$2x = -12 - 3 \quad \text{y} \quad 2x = 12 - 3$$
$$2x = -15 \quad \text{y} \quad 2x = 9$$
$$x = -\frac{15}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{9}{2}$$

## INECUACIONES O DESIGUALDADES.

Una desigualdad o inecuación es una expresión algebraica que está formada por dos miembros separados por un símbolo de desigualdad. Este símbolo puede ser $<, >, \leq y \geq$.

Las inecuaciones, a diferencia de las ecuaciones, tienen como solución a intervalos de números que pueden, o no, incluir a los extremos del mismo.

En los casos $\leq y \geq$ el valor extremo del intervalo está incluido en la solución mientras que en $< y >$ no lo está. Si un valor extremo es $\infty$ ó $-\infty$ estrictamente usamos $< o >$.

Al igual que en las ecuaciones, resolver una inecuación es hallar el o los valores que la hacen cierta, solo que las inecuaciones tienen infinitas soluciones agrupadas en un conjunto. Para representar estos conjuntos solución de forma simbólica, se utilizan paréntesis ( , ) para el caso de $<$ $y$ $>$ o bien se utilizan [ , ] para el caso de $\leq$ $y$ $\geq$ .
Para resolver una inecuación se realizan los mismos pasos que en la solución de una ecuación, excepto en el caso en que se necesita multiplicar ambos miembros de la inecuación por un número negativo; en esos casos se debe cambiar el sentido de la desigualdad.

Ejemplos.

1) Hallar el conjunto solución para la siguiente desigualdad $6 < 2x - 4 \leq 12$ es:

$$6 < 2x - 4 \leq 12$$
$$6 + 4 < 2x \leq 12 + 4$$
$$10 < 2x \leq 16$$
$$\frac{10}{2} < x \leq \frac{16}{2}$$
$$5 < x \leq 8$$

La solución también se representa como (5, 8]

2) ¿Cuál es el intervalo solución de la expresión $|x + 2| < 5$ ?

$$|x + 2| < 5$$
$$-5 < x + 2 < 5$$
$$-5 - 2 < x < 5 - 2$$
$$-7 < x < 3$$

También representamos la solución como: $(-7, 3)$

3) Hallar el conjunto solución de la inecuación $|4x + 1| \leq 15$

$$|4x + 1| \leq 15$$
$$-15 \leq 4x + 1 \leq 15$$
$$-15 - 1 \leq 4x \leq 15 - 1$$
$$-16 \leq 4x \leq 14$$
$$-4 \leq x \leq \frac{14}{4}$$

También representamos la solución como: $\left[-4, \frac{14}{4}\right]$

## ENTEROS Y PRINCIPIOS ALGEBRAICOS

### NÚMEROS REALES.

En términos generales, la aritmética estudia las relaciones existentes entre los números.
Existen distintos conjuntos de números entre los que destacamos: los números naturales, los números enteros, los números racionales y los números irracionales. Cada uno de estos conjuntos tiene sus propias características y propiedades. La unión de todos estos conjuntos, y las propiedades que se generan, nos dan la materia de estudio de la aritmética.

El primer conjunto de números que surge en la historia son los naturales; estos se conocen como números para contar y son los siguientes:

*N = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8…)* donde *N* es el símbolo que los representa.

El segundo conjunto de números que surge son los enteros, estos serán los naturales junto a sus respectivos números negativos y el cero. Son los siguientes:

*Z = (...-4,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, 4...)* donde *Z* es el símbolo que los representa.

Es evidente que los enteros incluyen a los naturales.

El tercer conjunto que surge en la aritmética son los racionales. Los racionales son las llamadas fracciones. Se representan con la letra Q y se definen como:

*Q = (x tal que x = p/q con p y q enteros)* Por ejemplo: $\frac{3}{8}, \frac{6}{4}, -\frac{2}{5}$

Se observa que los racionales incluyen a los enteros y a los naturales.
Tenemos ahora al siguiente conjunto, los irracionales. Este conjunto de números se puede considerar como complemento de los racionales ya que los irracionales serán aquellos que no se expresen como cociente de enteros. Se representan como:

*I = (x tal que x no es un racional)* Por ejemplo: $\pi = 3.14159 \ldots$

Los irracionales NO contienen a lo racionales.
El último de estos conjuntos numéricos son los reales, representados con *R* y son la unión de todos los conjuntos anteriores.

Podríamos decir que: $R = Q \cup I$

Es decir, los números reales serán la unión de números racionales con números irracionales. Es importante recordar que *Q* contiene a los enteros y estos, a su vez, contienen a los naturales.

## LEYES DE SIGNOS PARA SUMA Y RESTA.

En el desarrollo de diversas áreas de las matemáticas, es muy importante recordar el proceso correcto de operación para números que se encuentran sumando o restando.
Las reglas indicadas para esta operación son:

- *En una suma (o resta), si los signos son iguales se repite el signo y se suman los números.*
- *En una suma (o resta), si los signos son diferentes se mantiene el signo del mayor número y estos se restan.*

Ejemplo.

Realiza la operación:
$23 - 19 - 41 + 82 + 15 - 36 + 2 =$

Resolvemos la operación en forma binaria
$23 - 19 = 4$ $4 - 41 = -37$ $-37 + 82 = 45$ $45 + 15 = 60$ $60 - 36 = 24$
El resultado final es 24.

## REGLAS DE LOS SIGNOS PARA PRODUCTO Y DIVISIÓN.

Es importante recordar las reglas de los signos para números que se encuentran multiplicando o dividendo. Podemos observar que las reglas son exactamente las mismas en ambos casos.

$+ + = +$ Podemos pensar: $+ \times + = +$ pero también: $+ \div + = +$
$+ - = -$ Podemos pensar: $+ \times - = -$ pero también: $+ \div - = -$
$- + = -$ Podemos pensar: $- \times + = -$ pero también: $- \div + = -$
$- - = +$ Podemos pensar: $- \times - = +$ pero también: $- \div - = +$

Ejemplo.

Realiza la operación:
$(-3)(6)(-4)(8)(2)(3) =$
Respetando el orden y los signos de las operaciones tendremos:
$(-3)(6) = -18$ ; $(-18)(-4) = 72$ ; $(72)(8) = 576$ ; $(576)(2) = 1152$ ; $(1152)(-3) = -3456$

## JERARQUÍA DE OPERACIONES.

En muchos casos, una operación se presenta con uno o más símbolos de agrupación; para resolverla debemos realizar la operación indicada en el símbolo y después las que estén fuera de él.

En caso de no tener símbolos se respetar la jerarquía de operaciones que nos dice que el orden a resolver es:

1) Potencias.
2) Producto y división.
3) Suma y resta.

Ejemplos.

1) Realiza la operación:

$$(-3 + 4)\ 6 + 2\ (-4 - 5) - 7(6 - 4) =$$

Resolvemos la operación respetando los símbolos:

$$(1)(6) + (2)\ (-9) - 7(2) =$$
$$6 - 18 - 14 = -26$$

2) Realiza la operación:

$$-5 + 8 \times 4 + 6 \div 3 =$$

Resolvemos respetando jerarquía de operaciones

$$-5 + 32 + 2 = 29$$

3) Indica resultado de efectuar la operación:

$$13 + (4 - 6) \times (3 + 2) \div 5 - 2 \times 2$$

Resolvemos aplicando la jerarquía

$$13 + (-2) \times (5) \div 5 - 4$$
$$13 - 10 \div 5 - 4$$
$$13 - 2 - 4 = 7$$

## ORDEN EN LOS REALES.

Existe una ley en los números reales, y que en consecuencia se aplica a todos los subconjuntos de números, llamada ley de la tricotomía.

Esta ley nos dice lo siguiente: Sean A y B dos números reales, entonces solo una de las siguientes condiciones se cumple:

$$A > B$$
$$A < B$$
$$A = B$$

De acuerdo a esta ley, para cualquier pareja de números uno es mayor a otro o son iguales.

Para números enteros podemos observar fácilmente la relación entre ellos recordando la recta numérica y observando que número se encuentra a la derecha del otro, es decir, en toda pareja de números A y B, es mayor el que se encuentra a la derecha en la recta numérica.

Todo número positivo será mayor que un número negativo.

Ejemplos.

1) Indica el símbolo adecuado en cada caso.

9  12  16  8  – 4  – 2  – 8  – 9  5  25/5  3/8  9/24

Los símbolos serán:

9 < 12  16 > 8  – 4 < – 2  – 8 > – 9  5 = 25/5  3/8 = 9/24

2) Escribe los siguientes enteros en orden de menor a mayor: – 15, 24, – 5, 16, – 12, – 13, 14

Ordenando se tiene: – 15, – 13, – 12, – 5, 14, 16, 24

## ORDEN EN NÚMEROS RACIONALES.

En los racionales, que se definen como el cociente de dos enteros, también se aplica la ley de la tricotomía.

Para números enteros establecemos fácilmente la relación observando qué número se encuentra a la derecha del otro, pero para los racionales esta relación no es tan evidente. Para poder aplicar la ley de la tricotomía en los números racionales realizamos el producto entre los elementos de los números a analizar y observamos sus resultados. Es muy importante respetar el orden establecido en los productos.

Ejemplo.

Indica el símbolo correcto para la pareja de números:

$$\frac{8}{3} \quad \frac{7}{2}$$

Multiplicamos el primer numerador por el segundo denominador, es decir: (8) (2) = 16

Multiplicamos el primer denominador por el segundo numerador, es decir: (3) (7) = 21

Obtuvimos 16 y 21 en ese orden.

Establecemos la relación entre ellos

$$16 < 21$$

Por lo tanto

$$\frac{8}{3} < \frac{7}{2}$$

## SUMA Y RESTA DE NÚMEROS RACIONALES.

Para realizar la suma y resta de racionales consideramos dos diferentes casos.

El primer de ellos es la suma o resta con igual denominador. En ese caso debemos mantener el valor del denominador y realizar la operación entre los numeradores. Significa esto que solo realizamos operaciones con los numeradores, pero utilizando las *reglas de signos para suma y resta.*

El segundo caso de suma y resta con racionales es aquel en el que los denominadores son diferentes. Para resolver este tipo de operaciones es necesario transformar las fracciones en sus equivalentes y que tengan, todas, el mismo denominador.

Para hallar el número adecuado del denominador utilizamos el llamado mínimo común denominador, que es el múltiplo común y más pequeño de todos los denominadores.
Si los números racionales se presentan en forma mixta, es decir, una parte entera y una parte racional, podemos considerar su forma impropia.

Ejemplos.

1) Realiza la siguiente operación:

$$\frac{6}{5}-\frac{9}{5}+\frac{3}{5}+\frac{5}{5}-\frac{15}{5}=\frac{6-9+3+5-15}{5}=\frac{-10}{5}=-2$$

2) Realiza la siguiente operación:

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{3}-\frac{9}{6}=$$

El mínimo común de 4, 3 y 6 será 12, entonces tenemos:

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{3}-\frac{9}{6}=\frac{9}{12}+\frac{28}{12}-\frac{18}{12}=\frac{9+28-18}{12}=\frac{19}{12}$$

3) Determine la suma de los números mixtos $5\frac{2}{4}\ y\ 4\frac{3}{5}$

Expresamos los números de tal manera que no existan enteros.

$$5\frac{2}{4}=\frac{22}{4}\quad y\quad 4\frac{3}{5}=\frac{23}{5}$$

Entonces realizamos la siguiente operación.

$$\frac{22}{4}+\frac{23}{5}=$$

El mínimo común de 4 y 5 será 20, entonces tenemos:

$$\frac{22}{4}+\frac{23}{5}=\frac{110}{20}+\frac{92}{20}=\frac{110+92}{20}=\frac{202}{20}$$

## PRODUCTO Y DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES.

El producto y la división de números racionales se llevan a cabo de una forma muy sencilla, en realidad solo serán una aplicación de las tablas de multiplicar respetando las leyes de los signos para producto y división.
Las definiciones correspondientes son las siguientes:

Producto.- sean $\frac{P}{Q} y \frac{R}{S}$ dos números racionales, su producto es $\frac{PR}{QS}$

División.- sean $\frac{P}{Q} y \frac{R}{S}$ dos números racionales, su división es $\frac{PS}{QR}$

Ejemplos.

Realiza las siguientes operaciones:

$$-\frac{6}{5}\times\frac{8}{4}=-\frac{48}{20}$$

$$\frac{5}{4}\div\frac{7}{3}=\frac{15}{28}$$

## MÚLTIPLOS Y DIVISORES.

Entendemos por múltiplo de un número A a otro número B tal que A = CB donde C es un número entero.
Decimos que un número A es divisor de un número B si $\frac{B}{A}=C$ donde C es un número entero.

Ejemplos.

1) Hallar 5 múltiplos de 4:

Basta multiplicar el número 4 por 5 números enteros, es decir:

$$4\times 3=12 \qquad 4\times 7=28 \qquad 4\times 9=36 \qquad 4\times 11=44 \qquad 4\times 15=60$$

Existe una infinidad de múltiplos.

2) Hallar todos los divisores positivos del número 24:

Debemos hallar todos los números naturales que dividan al 24, es decir: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24
La cantidad de divisores en finita.

## NÚMEROS PRIMOS Y NÚMEROS COMPUESTOS.

Un número es primo si solo se puede dividir entre el mismo número y el número 1, es decir, solo tiene dos divisores. Cuando un número tiene tres o más divisores decimos que es compuesto.

Ejemplo.

Encuentra los divisores de cada número. Indica si es primo o compuesto:

1) 100 Sus divisores son: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100. Es compuesto
2) 35 Sus divisores son: 1,7, 5 y 35. Es compuesto.
3) 47 Sus divisores son: 1 y 47. Es primo.
4) 19 Sus divisores son: 1 y 19. Es primo.

## TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA.

Este importante teorema nos dice lo siguiente: *Todo número natural mayor que 1 puede expresarse en forma única como el producto de números primos.*
Dicha expresión, de cada número, se conoce como descomposición canónica del número.

Ejemplo.

Encuentra la descomposición canónica de cada número. Indica si es primo o compuesto:

$$\begin{array}{r|l} 1320 & 2 \\ 660 & 2 \\ 330 & 2 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$1320 = (2^3)(3)(5)(11)$ El número es compuesto.

$$\begin{array}{r|l} 87 & 87 \\ 1 & \end{array}$$

$87 = (1)(87)$ El número es primo.

Con este teorema podemos encontrar los divisores de un número.

Ejemplo.

Con la descomposición canónica, hallar los divisores de 72:

La descomposición canónica es: $72 = 2^3 3^2$

Los divisores serán:

$$
\begin{aligned}
2^3 3^2 &= (8)(9) = 72 \\
2^3 3^1 &= (8)(3) = 24 \\
2^3 3^0 &= (8)(1) = 8 \\
2^2 3^2 &= (4)(9) = 36 \\
2^2 3^1 &= (4)(3) = 12 \\
2^2 3^0 &= (4)(1) = 4 \\
2^1 3^2 &= (2)(9) = 18 \\
2^1 3^1 &= (2)(3) = 6 \\
2^1 3^0 &= (2)(1) = 2 \\
2^0 3^2 &= (1)(9) = 9 \\
2^0 3^1 &= (1)(3) = 3 \\
2^0 3^0 &= (1)(1) = 1
\end{aligned}
$$

Con la descomposición canónica podemos, también, encontrar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números.

## MÁXIMO COMUN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MULTIPLO.

Dos importantes valores en un conjunto de números son el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. El primero de ellos se refiere al mayor divisor común del conjunto mientras que el segundo es el menor de todos los múltiplos. Ambos elementos se pueden calcular con la descomposición canónica o bien por simple inspección.

Ejemplos.

1) Con la descomposición canónica, hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 12 y 28:

La descomposición canónica del 12 es: $12 = 2^2\,3$
La descomposición canónica del 28 es: $28 = 2^2\,7$

El máximo común divisor será: $2^2 = 4$ ya que es el factor común de las descomposiciones canónicas.
El mínimo común múltiplo será: $2^2\,3\,7 = 84$ ya que tomamos todos los factores primos al menor exponente.

2) Hallar el máximo común divisor de los números 40 y 48.
El máximo común divisor de dos números se obtiene hallando la descomposición en factores primos.

$48 = 2^4 \cdot 3$
$40 = 2^3 \cdot 5$

Para hallar el máximo común divisor se considera el producto de los factores comunes al menor exponente, es decir $2^3 = 8$

3) Hallar el mínimo común múltiplo entre 12 y 90.
El mínimo común múltiplo de dos números se obtiene hallando la descomposición en factores primos.

$12 = 2^2 \cdot 3$
$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Para hallar el mínimo común múltiplo se considera el producto de todos los factores considerando al mayor exponente en el caso de los comunes: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

## SUCESIONES NUMÉRICAS.

Una sucesión es un conjunto ordenado de números que cumple cierta regla de correspondencia. Cada elemento de la sucesión corresponde o está relacionado con un número natural.
Posición (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7…)
Elemento (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49…)
En este ejemplo entendemos que el elemento que está en la posición sexta (6) es el 36.

Al trabajar sucesiones se presentan dos problemas básicos:

- Hallar la regla de correspondencia, o los números siguientes, a partir de algunos elementos conocidos.
- Hallar elementos a partir de la regla de correspondencia.

Aunque las sucesiones suelen tener relaciones para su comportamiento, en ocasiones la relación no sea tan evidente y hallarla no es tan fácil.
Cuando la regla de correspondencia es conocida, podemos hallar cualquier elemento de la sucesión.

### Ejemplos.

1) ¿Cuál será el elemento 7 de la siguiente sucesión? $S_n = (2, 4, 8, 16, 32…)$

¿Cuál es la regla de correspondencia?
Al observar los elementos de la sucesión podemos pensar en la forma en la que van aumentando, es decir, de 2 a 4 habrá un aumento de 2 valores; de 4 a 8 un aumento de 4 valores; de 8 a 16 un aumento de 8 valores, etc. Si mantenemos esos aumentos ordenados llegaremos al elemento buscado que es el 128.

Otra forma de resolver esta sucesión es tratar de hallar la regla de correspondencia. Esta forma es adecuada ya que con ella podemos encontrar el elemento de cualquier posición.
Podemos observar que el primer elemento es $2^1$, el segundo es $2^2$, el tercero es $2^3$ y así sucesivamente, por lo que el elemento siete será $2^7 = 128$.

La regla de correspondencia se representa de la siguiente manera:
$S_n = (2^n)$ donde n representa a los números naturales.

2) Si el primer número de una sucesión es 0, el segundo es 2 y el tercero es 6, ¿cuál es el quinto término?

El quinto elemento es: 20
Ya que podemos observar que

0

0 + 2 = 2

2 + 4 = 6

6 + 6 = 12

12 + 8 = 20 y la sucesión es: 0, 2, 4, 6, 12, 20…

3) Indica los primeros 5 elementos de la sucesión:

$S_n = (4n + 2)$ donde n representa a los números naturales

Para hallar los elementos pedidos sustituimos el valor de n en la regla indicada.

Si n = 1 entonces el elemento es 4(1) + 2 = 6

Si n = 2 entonces el elemento es 4(2) + 2 = 10

Si n = 3 entonces el elemento es 4(3) + 2 = 14

Si n = 4 entonces el elemento es 4(4) + 2 = 18

Si n = 5 entonces el elemento es 4(5) + 2 = 22

La sucesión quedará: (6, 10, 14, 18, 22…)

¿Cuál será el elemento 20?

Simplemente sustituimos n = 20 en la regla indicada.

Si n = 20 entonces el elemento es 4(20) + 2 = 82

4) Indica los primeros 5 elementos de la sucesión $\frac{n^2}{2n}$

Sustituimos los números naturales indicados.

La fórmula es $\frac{n^2}{2n}$

Si $n = 1\ entonces\ \frac{1^2}{2(1)} = \frac{1}{2}$

Si $n = 2\ entonces\ \frac{2^2}{2(2)} = \frac{4}{4} = 1$

Si $n = 3\ entonces\ \frac{3^2}{2(3)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Si $n = 4\ entonces\ \frac{4^2}{2(4)} = \frac{16}{8} = 2$

Si $n = 5\ entonces\ \frac{5^2}{2(5)} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

Los elementos son: $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$

## PRODUCTOS NOTABLES.

El producto de polinomios tiene diversos casos muy frecuentes que se conocen como productos notables. En la siguiente tabla se muestran los más comunes:

| Productos notables | Ejemplos |
|---|---|
| $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | $(5x+3y)^2 = 25x^2 + 30xy + 9y^2$ |
| $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | $(2s-3t)^2 = 4s^2 - 12st + 9t^2$ |
| $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ | $(4+x)(4-x) = 16 - x^2$ |
| $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ | $(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ |
| $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ | $(2a-2b)^3 = 8a^3 - 24a^2b + 24ab^2 - 8b^3$ |
| $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ | $(m+1)(m^2 - m + 1) = m^3 + 1$ |
| $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ | $(x-2y)(x^2 + xy + 4y^2) = x^3 - 8y^3$ |
| $(a+b)(a+n) = a^2 + (m+n)a + mn$ | $(5+s)(5+t) = 25 + 5(s+t) + st$ |

## FACTORIZACIÓN.

Entendemos por factorización al proceso de descomposición de una expresión en sus factores, es decir, en aquellos términos que al multiplicarse generan la expresión original.

Existen varios casos de factorización, entre los que mencionamos:

- Factor común.
- Diferencia de cuadrados.
- Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
- Trinomio cuadrado perfecto.
- Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
- Suma y diferencia de cubos.

Cada uno de estos casos presenta procesos de solución totalmente diferentes.

### *Diferencia de cuadrados.*

Llamamos así a este caso de factorización porque efectivamente tenemos una diferencia y de dos términos que están elevados al cuadrado (o que admiten raíz cuadrada exacta).

Su expresión general es:

$$a^2 - b^2$$

Y su factorización se representa como un producto de binomios conjugados.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Para efectos prácticos debemos obtener la raíz cuadrada del primer término y la raíz cuadrada del segundo; con ellas formamos los binomios conjugados.

Ejemplo.

Factorizar $9x^8 - 16y^4$
Obtenemos $\sqrt{9x^8} = 3x^4$
Obtenemos $\sqrt{16y^4} = 4y^2$
Los escribimos como binomios conjugados:

$$9x^8 - 16y^4 = (3x^4 - 4y^2)(3x^4 + 4y^2)$$

Importante: al coeficiente se le busca la raíz; al exponente se le divide entre 2.

***Factor común.***

Este caso de factorización se presenta cuando en una expresión algebraica existe un término común.
Para factorizar bajo este caso, debemos buscar en toda la expresión algebraica a aquel término que, de manera implícita, o explicita, se encuentre en todos los términos de esta.
Para hallar el factor común consideramos las reglas siguientes:

1. Buscamos el máximo común divisor de los coeficientes numéricos.
2. De las literales que aparezcan en todos los términos tomamos la de menor exponente.

Para factorizar la expresión, la dividimos entre el factor común e indicamos el resultado de la división por este último.

Ejemplos.

1) Factorizar la expresión:

$$8x^4y^6 + 24x^6y^2 - 16x^3y^4$$

El factor común es: $4x^3y^2$
La división será: $2xy^4 + 6x^3 - 4y^2$
La factorización es:

$$8x^4y^6 + 24x^6y^2 - 16x^3y^4 = (4x^3y^2)(2xy^4 + 6x^3 - 4y^2)$$

2) Simplifica la expresión: $\frac{m^2 - 9}{m^2 - 3m}$

Factorizamos en el numerador y en el denominador de acuerdo con el caso que corresponde. Después simplificamos.

$$\frac{m^2 - 9}{m^2 - 3m} = \frac{(m-3)(m+3)}{(m)(m-3)} = \frac{m+3}{m}$$

### ***Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$***

Factorizar este tipo de trinomios es un proceso muy simple. El proceso a seguir consiste en buscar dos números que multiplicados den el término independiente y sumados o restados den el término lineal. El signo del primer paréntesis deberá coincidir con primer signo del trinomio. El signo del segundo paréntesis será el producto de los dos signos del trinomio. Si los dos signos (en los paréntesis) son iguales, los números se suman; si los signos son diferentes, los números se restan.

Ejemplos.

1) Factorizar el trinomio:

$$x^2 + 8x + 12$$

Debemos buscar dos números que multiplicados den 12 y sumados den 8. Tales números son 6 y 2.

La factorización es:

$$x^2 + 8x + 12 = (x + 6)(x + 2)$$

2) Factorizar el trinomio:

$$x^2 - 2x - 24$$

Debemos buscar dos números que multiplicados den 24 y restados den 2. Tales números son 6 y 4.

La factorización es:

$$x^2 - 2x - 24 = (x - 6)(x + 4)$$

### ***Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$***

Este tipo de factorización es el menos simple de todos. El proceso a seguir consiste en transformar el trinomio en uno del tipo anterior. Para llevar a cabo la transformación debemos multiplicar por el coeficiente del término cuadrado. Durante el proceso debemos observar que el producto mencionado tiene diversos desarrollos en cada término del trinomio:

- Para el primer término se indica el cuadrado.
- Para el segundo término se indica el producto.
- Para el tercer término se realiza el producto.

Se realiza la transformación y se resuelve como en el caso anterior.

Es importante recordar que al final de la factorización se deberá dividir entre el término con el que se multiplicó inicialmente, para así regresar al trinomio original y que en consecuencia el resultado sea correcto.

Ejemplo.

Factorizar el trinomio:

$$2x^2 + 9x + 4$$

Multiplicamos por 2.

$$(2)(2x^2 + 9x + 4)$$

"Indicamos" el producto.

$$2^2x^2 + (2)(9x) + 8$$

Reordenamos.

$$(2x)^2 + (9)(2x) + 8$$

Factorizamos.

$$(2x + 8)(2x + 1)$$

Dividimos entre 2.

$$\frac{(2x+8)(2x+1)}{2 \quad\quad 1}$$

Simplificamos.

$$(x + 4)(2x + 1)$$

La factorización es:

$$2x^2 + 9x + 4 = (x + 4)(2x + 1)$$

***Suma y diferencia de cubos.***

Este tipo de factorización considera dos casos: la suma y la diferencia. Ambos casos tienen un desarrollo similar y el único cambio es en dos signos.

Las formas generales de este producto notable serán:

$a^3 + b^3$ Para la suma.
$a^3 - b^3$ Para la diferencia.

Podemos simplificar la fórmula general de ambos en una sola, que es la siguiente:

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

La redacción de la fórmula es de la siguiente manera:

"Raíz cúbica del primer término más (menos) raíz cúbica del segundo término por el producto del primer término cuadrado menos (más) el producto de las raíces cúbicas más el segundo término al cuadrado"

Ejemplos.

1) Factoriza la siguiente expresión:

$$27x^3 + 8$$

En este caso, la raíz cúbica del primer término es: $3x$
La raíz cúbica del segundo término es: 2
Aplicando la formula tenemos:

$$27x^3 + 8 = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$$

2) Factoriza la siguiente expresión:

$$64x^6 - 125y^3$$

En este caso, la raíz cúbica del primer término es: $4x^2$
La raíz cúbica del segundo término es: $5y$
Aplicando la formula tenemos:

$$64x^6 - 125y^3 = (4x^2 - 5y)(16x^4 + 20x^2y + 25y^2)$$

## RAZONES Y PROPORCIONES.

Una razón es el cociente de dos cantidades. Una proporción es la igualdad de dos razones.
Una proporción tiene la forma:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

Donde A y D son los extremos
B y C son los medios.

Para resolver una proporción, en caso de existir una incógnita, utilizamos la propiedad que dice: *"el producto de medios es igual al producto de extremos"*

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \quad \textit{Es decir: } AD=BC$$

Las proporciones pueden ser directas e inversas y tienen múltiples aplicaciones.
Cuando tenemos una proporción directa debemos multiplicar los valores tal y como lo marca la regla.
Si la proporción es inversa, primero modificamos el orden en alguna de las dos razones y después aplicamos la regla.

### Ejemplos.

1) Resolver la proporción directa:

$$\frac{3}{x}=\frac{8}{7}$$

Por ley tendremos:

$$3\cdot 7=8\cdot x$$
$$21=8x$$
$$\frac{21}{8}=x$$

2) Resolver la proporción inversa.

$$\frac{9}{6}=\frac{x}{2}$$

Primero invertimos alguna de las dos razones.

$$\frac{6}{9}=\frac{x}{2}$$

Aplicamos ahora la ley y tendremos:

$$6\cdot 2=9\cdot x$$
$$12=9x$$
$$\frac{12}{9}=x$$

3) Si $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$ y $a + b = 24$ , entonces ¿cuáles serán los valores de a y b?

Como sabemos que $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$ tenemos infinidad de valores para a y b, es decir:

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \frac{20}{12} = \frac{25}{15} \text{ etc.}$$

Elegimos la pareja que cumpla con la segunda condición.

$$a = 15 \;\; y \;\; b = 9$$

## REGLA DE TRES.

Algunas de las aplicaciones de las proporciones son la regla de tres y los porcentajes.
Aplicamos una regla de tres en aquellos problemas donde existen tres datos y una incógnita, donde además existe una relación de proporcionalidad. Una relación es directamente proporcional cuando al aumentar una cantidad, aumenta la otra. Una relación es inversamente proporcional cuando al aumentar una cantidad, la otra disminuye.

El porcentaje es una regla de tres directa.
Entendemos por porcentaje a las partes consideradas por cada cien.
El porcentaje se puede representar en forma entera, por ejemplo: 15%.
El porcentaje se puede representar en forma decimal, por ejemplo: 0.15
El porcentaje se puede representar en forma racional, por ejemplo: $\frac{15}{100}$
Los problemas sobre porcentaje se resolverán como proporciones directas.

### Ejemplos.

1) Para llevar a cabo una obra en construcción, 13 personas requieren de 28 días. ¿Cuántos días necesitarán 6 personas?

*En este caso la regla es inversa* y la relación es:

$$\begin{array}{ccc} \text{P} & & \text{D} \\ \frac{13}{x} & = & \frac{28}{6} \end{array}$$

Resolvemos bajo el proceso marcado para relaciones inversas.

$$13 \cdot 28 = 6 \cdot x$$
$$364 = 6x$$
$$\frac{364}{6} = x$$

Es decir, se requieren: 60.66 días.

2) El costo de dos aparatos electrodomésticos es de $ 374. ¿Cuál será el costo de 7 aparatos?

*En este caso la regla es directa* y la relación es:

$$\begin{array}{cc} \text{A} & \$ \end{array}$$
$$\frac{2}{7} = \frac{374}{x}$$

Resolvemos bajo el proceso marcado para relaciones directas.

$$2 \cdot x = 7 \cdot 374$$
$$2x = 2618$$
$$x = \frac{2618}{2}$$

Es decir, el costo es de $ 1,309.00

3) Un atleta recorre 500 m en n minutos. ¿Qué distancia, en metros, recorrerá en 3 minutos?

Utilizamos una regla de tres directa en la que tenemos metros en la primera columna y minutos en la segunda. La incógnita la representamos con x.

$$\frac{500}{x} = \frac{n}{3}$$

Desarrollando tenemos:

$$(500)(3) = nx$$
$$1500 = nx$$
$$\frac{1500}{n} = x$$

4) El valor de un teléfono es de $ 12,350.00, si se ofrece con un 15 % de descuento, ¿cuál será el costo de venta?

En este caso hablamos de un problema de porcentaje.

La relación es:

$$\begin{array}{cc} \$ & \% \end{array}$$
$$\frac{12350}{x} = \frac{100}{15}$$

Resolvemos bajo el proceso de regla de tres directa

$$12350 \cdot 15 = 100 \cdot x$$
$$185250 = 100x$$

$$x = \frac{185250}{100}$$
$$x = 1852.50$$

Para obtener el precio de venta, restamos el valor del descuento ($ 1,852.50) al precio real del teléfono ($ 12,350). Es decir, el costo es de $ 10,497.50

## BASES ALGEBRAICAS EN DECISIONES FINANCIERAS.

De la necesidad de calcular los intereses surgieron las matemáticas financieras. La forma más sencilla de calcularlos se denomina interés simple; para su cálculo, se consideran los meses como si tuvieran 30 días y los años, 360 días; a esto se le denomina: “tiempo comercial”.

En una operación matemática financiera intervienen básicamente tres elementos fundamentales: el capital, la tasa de interés y el tiempo o plazo.

• Los intereses es el dinero que se pagará por el uso del dinero ajeno.

• Tasa de interés es la razón de los intereses devengados entre el capital en un lapso. Se expresa en tanto por uno o en tanto por ciento.

• Tiempo es el número de unidades de tiempo que transcurren entre la fecha inicial y final en una operación financiera. Se conoce también como plazo.

• El capital es una cantidad o masa de dinero localizada en una fecha o punto inicial de una operación financiera, igual se le puede llamar principal, valor actual, valor presente, es el valor del dinero en este momento.

• Monto es el valor del dinero en el futuro, es el capital más los intereses generados, igual se le puede llamar capital futuro o valor acumulado.

***Inversión de dinero a interés simple.***

El interés simple es aquel que se calcula sobre un capital inicial que permanece invariable en el tiempo; los intereses se manejan por separado y se retiran de la operación financiera. En consecuencia, el interés que se obtiene en cada intervalo unitario de tiempo es siempre el mismo.
La fórmula que nos permite calcular el interés simple es la siguiente:

$$I = cit$$

Dónde:
I es el interés.
C es el capital.
i es la tasa de interés.
T es el tiempo.

De la fórmula principal podemos utilizar propiedades de la igualdad para despejar fórmulas adicionales que nos permitirán obtener, dependiendo de los datos, el capital, el tiempo y la tasa de interés. Las fórmulas serán las siguientes:

Para la tasa de interés $$i = \frac{I}{ct}$$

Para el capital $$c = \frac{I}{it}$$

Para el tiempo $$t = \frac{I}{ci}$$

Se conoce por monto a la suma del capital (C) más el interés (I). También se le denomina valor futuro, valor acumulado o valor nominal y se obtiene de la siguiente manera:

$$M = C + I$$

***Inversión de dinero a interés compuesto.***

Al invertir un dinero o capital a una tasa de interés durante cierto tiempo, nos devuelven ese capital más los beneficios o intereses, que entonces se llama monto. Cuando los intereses no se retiran y se acumulan al capital inicial para volver a generar intereses, se dice que la inversión es a interés compuesto. El interés compuesto se da, entonces, cuando al vencimiento de una inversión a plazo fijo no se retiran los intereses, así se presenta un incremento sobre el incremento ya obtenido y se tiene interés sobre interés.

El interés simple produce un crecimiento lineal del capital; por el contrario, un capital a interés compuesto crece de manera exponencial.

Cuando el interés es compuesto o capitalizable debemos usar la fórmula:

$$M = P(1 + i)^n$$

Dónde:

M es el monto.

P es el capital inicial.

i es la tasa de interés del periodo.

n es el número de periodos en el total del tiempo.

Ejemplos.

1. Deposite $22,000 en una caja de ahorro por medio año y me pagarán un rendimiento del 1.2 % mensual no capitalizable. ¿Cuánto dinero ganaré en el periodo?

Como los intereses no son capitalizables usamos la fórmula:

$$I = cit$$

Tenemos

$$I = (22000)(1.2\%)(6)$$

$$I = (22000)(0.012)(6)$$

$$I = 1584$$

Los intereses son $1,584.00

Es importante representar correctamente la tasa de interés en forma decimal.

2. ¿Cuál es el interés que produce un capital de $15,000 en 3 años al 4% mensual?

Como los intereses no son capitalizables usamos la fórmula:

$$I = cit$$

Sustituyendo $$I = (15000)(4\%)(36)$$

$$I = (15000)(0.04)(36)$$

$$I = 21600$$

Los intereses son $21,600

3. Lucia paga $2,295 de interés por un préstamo de $25,500 en tres años. ¿Cuál fue la tasa de interés anual que pago por dicho préstamo?

Debemos despejar el valor de i en la fórmula:

$$I = cit$$

Y tenemos $$i = \frac{I}{ct}$$

Sustituyendo $$i = \frac{2295}{(25500)(3)}$$

$$i = \frac{2295}{76500}$$

$$i = 0.03$$

Es decir, la tasa de interés fue del 3 %

4. Manuel pidió un préstamo de $10,000 al 7%, al liquidar su deuda pagó por concepto de intereses $1400. ¿En qué tiempo pagó el préstamo?

Debemos despejar el valor de t en la fórmula:

$$I = cit$$

Tenemos $$t = \frac{I}{ci}$$

Sustituyendo $$t = \frac{1400}{(10000)(0.07)}$$

$$t = \frac{1400}{700}$$

$t = 2$ Es decir 2 años

5. ¿Cuál es el monto a pagar por un crédito de $50,000, a una tasa de interés del 12% anual capitalizable en tres años?

Como el interés es capitalizable debemos usar la fórmula:

$$M = P(1+i)^n$$

Sustituyendo $$M = 50000(1+0.12)^3$$

$$M = 50000(1.12)^3$$

$$M = 50000(1.4049)$$

$$M = 70245$$

6. Jaime realiza una inversión de $35,000 con una tasa de interés capitalizable de 10% anual. ¿Qué cantidad tendrá en 4 años?

Como el interés es capitalizable debemos usar la fórmula:

$$M = P(1+i)^n$$

Sustituyendo $$M = 35000(1+0.10)^4$$

$$M = 35000(1.10)^4$$

$$M = 35000(1.4641)$$

$$M = 51243.50$$

7. Un capital de $12,000 se invierte a una tasa de interés del 12% anual. ¿Cuál será la cantidad obtenida después de 2 años, si el interés se genera semestralmente?

Como el interés es capitalizable debemos usar la fórmula:

$$M = P(1+i)^n$$

Sustituyendo $$M = 12000(1+0.06)^4$$

$$M = 12000(1.06)^4$$

$$M = 12000(1.2624)$$

$$M = 15148.80$$

En este caso el periodo es semestral y tenemos 4 semestres. El interés anual de 12% por lo que se debe considerar de 6 % semestral.

## GEOMETRÍA Y CALCULO DE ÁREAS

### GEOMETRÍA PLANA.

La geometría plana es la rama de las matemáticas que estudia las figuras y sus relaciones.
Uno de los conceptos básicos de la geometría es el ángulo. Se denomina ángulo a la abertura comprendida entre dos rectas que se cortan en un punto. Las rectas son los lados del ángulo y el punto donde se cortan es su vértice.

La medida de un ángulo está relacionada con su abertura. Aunque existen diversas medidas se acostumbra a utilizar el grado sexagesimal. Un grado en el sistema sexagesimal corresponde a una de las 360 partes en que se divide a una circunferencia.

Los ángulos los podemos clasificar por su medida de la siguiente manera:

Ángulos agudos.- Son aquellos que miden menos de 90º

Ángulos rectos.- Son aquellos que miden exactamente 90º

Ángulos obtusos.- Son los que miden más de 90º

Ángulo llano.- Es aquel que mide exactamente 180°

Ángulo perigonal.- Es aquel que mide 360º (exactamente una vuelta)

Otra clasificación importante es la que se refiere a los ángulos que se presentan en parejas, en esta clasificación es importante la suma de los ángulos considerados.

Ángulos complementarios.- Son aquellos que suman 90º

Ángulos suplementarios.- Son aquellos que miden 180º

Ángulos conjugados.- Son los que suman 360º

Ángulos opuestos por el vértice.- son aquellos en los que los lados de uno son la prolongación de los lados del otro.

Ejemplo:

¿Qué ángulo es igual al doble de su suplemento?

Sea A el ángulo indicado y B el suplemento, entonces los ángulos cumplirán:

$$A + B = 180° \quad \text{Además } A = 2B$$

Sustituyendo

$$2B + B = 180°$$
$$3B = 180°$$
$$B = \frac{180°}{3}$$

Es decir $B = 60°$ por lo que el ángulo buscado es $A = 120°$ que es el doble de su suplemento.

## TRIÁNGULOS.

Llamamos triángulo a la figura geométrica que se forma con la unión de los segmentos de recta entre tres puntos no colineales.

Por construcción, un triángulo está formado por tres lados y, en consecuencia, por tres ángulos. Los puntos donde se unen los lados reciben el nombre de vértices.

Los triángulos se clasifican por lados y por ángulos.

Si clasificamos a los triángulos por sus lados tendremos:
Triángulo Equilátero.- Es el que tiene sus tres lados iguales.
Triángulo Isósceles.- Es el que tiene dos lados iguales.
Triángulo Escaleno.- Es el que tiene lados desiguales.

Si clasificamos a los triángulos por sus ángulos tendremos:
Triángulo Acutángulo.- Es el que tiene sus ángulos agudos
Triángulo Rectángulo.- Es el que tiene un ángulo recto
Triángulo Obtusángulo.- Es el que tiene un ángulo obtuso

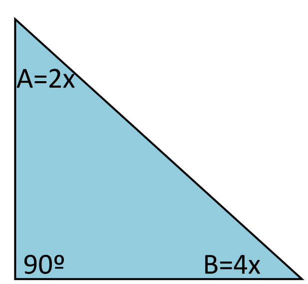
Independientemente de su forma, todos los triángulos cumplen con las siguientes propiedades o teoremas:
Teorema. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180º
Teorema. La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 90º
Teorema. La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es de 360º
Teorema. Un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes.

Otras importantes propiedades de triángulos son las siguientes:

- En todo triángulo, a ángulos iguales se oponen lados iguales.
- En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.
- En todo triángulo, un lado es menor a la suma de los otros dos.
- En todo triángulo, un lado es mayor a la diferencia de los otros dos.

### Ejemplos.

1) Hallar el valor de cada ángulo en la figura.



Sabemos que los dos ángulos agudos suman 90° por lo que debemos resolver la ecuación

$$2x + 4x = 90°$$
$$6x = 90°$$
$$x = \frac{90°}{6}$$

Tenemos que $x = 15°$ por lo que sustituimos en cada ángulo agudo para obtener:

$$A = 30° \text{ y } B = 60°$$

2) Uno de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo es la cuarta parte del otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?

Sean A y B los dos ángulos agudos, entonces

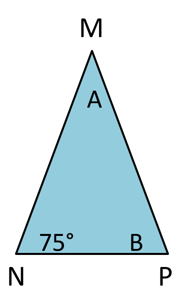
$$A + B = 90° \qquad \text{Además } A = \tfrac{B}{4}$$

Sustituyendo

$$\frac{B}{4} + B = 90°$$
$$\frac{5B}{4} = 90°$$
$$5B = 360°$$

Al despejar tenemos que $B = 72°$ y entonces $A = 18°$

3) Hallar el valor del ángulo A en el triángulo siguiente si sabemos que MN = MP



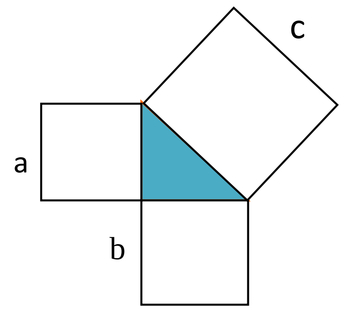

Al tener dos lados iguales, los ángulos opuestos serán iguales, es decir, B = 75°

Entonces

$$A = 180° - 2(75°)$$
$$A = 180° - 150°$$
$$A = 30°$$

## TEOREMA DE PITÁGORAS.

Posiblemente el teorema más conocido en la geometría plana es el teorema de Pitágoras. Dicho teorema se refiere al área de tres cuadrados construidos en base, o alrededor, de un triángulo rectángulo.




En la figura anterior, el teorema nos dice que "*el área del cuadrado **c** es igual al área del cuadrado **a** más el área del cuadrado **b***"

Si interpretamos la figura anterior y apoyándonos en el valor del área de un cuadrado tendremos:

"*El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"*

Interpretando el teorema a partir de las literales en la figura tendremos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Con el teorema de Pitágoras podremos calcular el valor de uno de los lados del triángulo rectángulo si conocemos el valor de los otros dos.

En base al teorema tendremos:

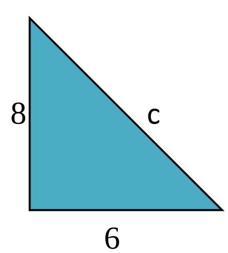
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

### Ejemplos.

1) Hallar el valor de la hipotenusa en el triángulo rectángulo siguiente:

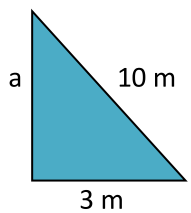


Como debemos calcular el valor de la hipotenusa consideramos la fórmula:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{8^2 + 6^2}$$
$$c = \sqrt{64 + 36}$$
$$c = \sqrt{100}$$

Es decir, la hipotenusa mide10 unidades.

2) ¿Cuál será la altura de un muro si una escalera de 10 mts de largo alcanza su máximo y se apoya a 3 mts de la base?




En este caso deberemos calcular el valor de un cateto por lo que la fórmula adecuada es:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$a = \sqrt{(10\ m)^2 - (3\ m)^2}$$
$$a = \sqrt{100\ m^2 - 9m^2}$$
$$a = \sqrt{91m^2}$$

Es decir, la altura del muro es de 9.53 mts

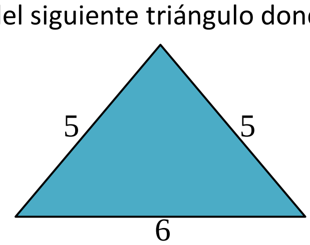
## ÁREA Y PERÍMETRO DE UN TRIÁNGULO.

Entendemos por perímetro de un triángulo a la suma de los valores de sus tres lados mientras que el área será el espacio que contienen dichos lados.
Para calcular el área y el perímetro, respectivamente, utilizamos las siguientes fórmulas:

$$A = \frac{ba}{2} \text{ y } P = l_1 + l_2 + l_3$$

Ejemplos.

1) Hallar el área y el perímetro del siguiente triángulo donde u es la unidad de medida:



Para el área. En este caso la base es 6 y la altura la obtenemos con el teorema de Pitágoras trazando la bisectriz del ángulo formado por los lados iguales.

$$h = \sqrt{5^2 - 3^2}$$
$$h = \sqrt{25 - 9}$$
$$h = \sqrt{16}$$
$$h = 4$$

Entonces tenemos:

$$A = \frac{(6)(4)}{2}$$

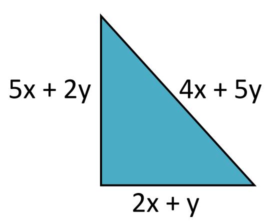
$$A = \frac{24}{2}$$

$$A = 12u^2$$

El perímetro de un triángulo es la suma de los lados.

$$p = 5 + 5 + 6 = 16u$$

2) Calcular el área y el perímetro del siguiente triángulo si x = 2, y = 1 y u es la unidad de medida.




En este caso la base y la altura son los catetos del triángulo rectángulo. Como x= 2 y = 1 sustituimos y los catetos son 5 y 12 mientras que la hipotenusa es 13.
Entonces tenemos:

$$A = \frac{(5)(12)}{2}$$

$$A = \frac{60}{2}$$

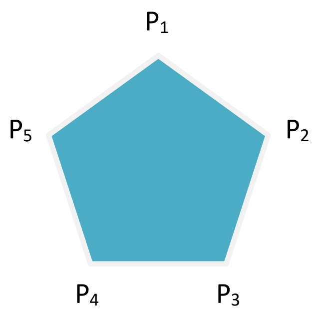
$$A = 30u^2$$

El perímetro de un triángulo es la suma de los lados.

$$p = 5 + 12 + 13 = 30u$$

## POLÍGONOS.

Un polígono es la figura cerrada formada por **n** segmentos $P_1P_2$, $P_2P_3$, $P_3P_4$… $P_nP_1$ $(n \geq 3)$, llamados **lados.** A los puntos $P_1$, $P_2$ ,……. $P_n$ se les llama **vértices**.




Los polígonos se pueden clasificar en regulares e irregulares. Son polígonos regulares aquellos en los que tanto los ángulos como los lados del mismo son iguales entre sí, por ejemplo, un cuadrado o un triángulo equilátero. Son polígonos irregulares aquellos que no cumplen con esa condición, por ejemplo: un rectángulo o un trapecio.

Los polígonos regulares tienen diversas propiedades como son:

*Centro.*- Llamamos centro de un polígono regular al centro de la circunferencia que se construye en la parte externa del polígono (circunscrita).

*Radio.*- Llamamos radio de un polígono regular al segmento de recta que une el centro con un vértice.

*Ángulo central.*- Es el formado por dos radios consecutivos.

*Apotema.*- En un polígono regular, es el segmento de recta que une al centro con uno de sus lados y que además es perpendicular.

*Ángulo interno.*- Todos aquellos formados por dos lados consecutivos.

*Ángulo externo.*- Se obtienen prolongando uno de los lados; son adyacentes a un ángulo interno.

*Diagonal.*- Es el segmento de recta que une a dos vértices no consecutivos del polígono.

Para calcular el perímetro de cualquier polígono regular solo multiplicamos el valor de un lado por la cantidad de lados, es decir: $P = nl$

Para calcular el área de cualquier polígono regular utilizamos la fórmula: $A = \frac{pa}{2}$ donde p es el perímetro y a es la apotema.

### Ejemplos.

1) Calcular el área y el perímetro de un cuadrado de lado 6 cm.

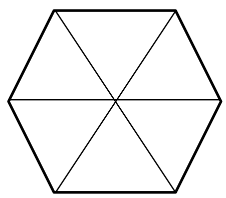
Para calcular el perímetro basta multiplicar el valor del lado por 4 que es la cantidad de lados de un cuadrado.

$$P = nl \quad P = (4)(6\ cm) \quad P = 24\ cm$$

Para calcular el área multiplicamos lado por lado, es decir:

$$A = l \cdot l \quad A = (6\ cm)(6\ cm) \quad A = 36\ cm^2$$

2) Calcular el área y el perímetro del siguiente hexágono regular si el valor de la diagonal es de 4 unidades.



Por construcción, los triángulos obtenidos son equiláteros y la mitad del valor de la diagonal corresponde a un lado de cada triángulo equilátero, esto implica que los tres lados del triángulo miden 2 unidades. La altura de cada triángulo es la bisectriz de un ángulo y se forma un triángulo rectángulo donde la hipotenusa mide 2, un cateto 1. Deberemos calcular el valor de un cateto por lo que fórmula adecuada es:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$a = \sqrt{(2)^2 - (1)^2}$$
$$a = \sqrt{4 - 3}$$
$$a = \sqrt{3}$$

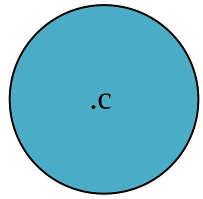
Es decir, la altura del triángulo o el apotema del hexágono serán $\sqrt{3}$

El perímetro del hexágono es $P = 6 \cdot 2$ Es decir: 12 unidades.

El área del hexágono es $A = \frac{pa}{2}$ $A = \frac{12\sqrt{3}}{2}$ $A = 6\sqrt{3}$ unidades al cuadrado.

## CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA.

Llamamos circunferencia al conjunto de todos los puntos que equidistan de uno fijo llamado centro. La distancia referida se conoce como radio. En base a la definición tendremos también puntos cuya distancia al centro sea menor al radio; estos son los puntos interiores. A la circunferencia y el conjunto de puntos interiores se le denomina círculo.




En la circunferencia podemos definir algunos puntos, rectas y ángulos importantes.
*Radio.*- Además de ser la distancia de la definición, se considera como el segmento de recta que une al centro con cualquier punto.
*Cuerda.*- Segmento de recta que une a dos puntos de la circunferencia.
*Diámetro.*- Es la cuerda que pasa por el centro.
*Secante.*- Es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos.
*Tangente.*- Es la recta que toca a la circunferencia en un solo punto.
*Ángulo central.*- es el formado por dos radios.
*Semicircunferencia.*- Es la mitad de la circunferencia.
*Semicírculo.*- Es la mitad del círculo.

Para calcular el área y el perímetro de una circunferencia (círculo) consideramos el valor de $\pi = 3.14159$ que es un número irracional que representa la cantidad de veces que el diámetro cabe en la circunferencia.

Para calcular tanto el área como el perímetro de un círculo tenemos las siguientes formulas:

$$P = \pi d \qquad A = \pi r^2$$

Donde d es el valor del diámetro y r es el valor del radio.

Ejemplos.

1) Calcular el valor del radio y el área de una circunferencia cuyo perímetro es de 36 π unidades.

Para el radio:

Sabemos que el perímetro es $P = \pi d$
Entonces $36\pi = \pi d$
Al despejar tenemos $36 = d$
Entonces el radio es $r = 18$ unidades.

Para el área:

Sabemos que el área es $A = \pi r^2$
Entonces $A = \pi 18^2$
Es decir $A = 324\pi$ unidades al cuadrado.

2) Calcular el valor del radio y el perímetro de una circunferencia cuya área es de 169 π unidades al cuadrado.

Para el radio:

Sabemos que el área es $A = \pi r^2$

Entonces $169\,\pi = \pi r^2$

Al despejar tenemos $r^2 = 169$

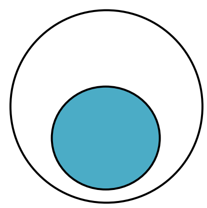
Entonces el radio es $r = 13$ unidades.

Para el perímetro:

Sabemos que el perímetro es $P = \pi d$

Entonces $P = 26\pi$ unidades.

3) La siguiente figura muestra una plataforma circular de área total $8\pi$ donde el radio del círculo interior mide 2 unidades. Si se realiza un disparo a dicha plataforma, ¿cuál es la probabilidad de que impacte en el área sombreada?



El área de un círculo se obtiene con la fórmula: $A = \pi r^2$

En este caso sabemos el área del círculo exterior que es $A_2 = 8\pi$

El área de un círculo interior es: $A_1 = \pi(2)^2$ es decir: $A_1 = 4\pi$

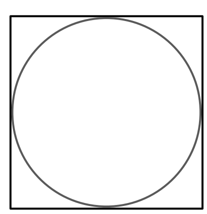
Por lo tanto, el área del sector sombreado es la resta de las dos áreas: $8\pi - 4\pi = 4\pi$

La probabilidad de impactar en el área sombreada es:

$$P(impacto) = \frac{4\pi}{8\pi}$$

Es decir: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

4) En la figura, el círculo está inscrito en el cuadrado de área $16\ cm^2$. ¿Cuál es, en $cm^2$, el área del círculo?



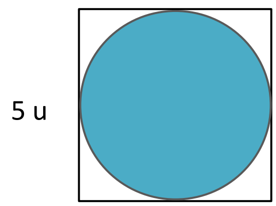
Como el círculo está inscrito en el cuadrado, la mitad del lado del cuadrado corresponde al radio del círculo. Si el lado del cuadrado es 4 entonces el radio del círculo es 2.

El área de un círculo se obtiene con la fórmula: $A = \pi r^2$

En este caso $A = \pi(2)^2$

$$A = 4\pi \ cm^2$$

5) Calcula el valor del área, en unidades cuadradas, de la parte NO sombreada en la figura.



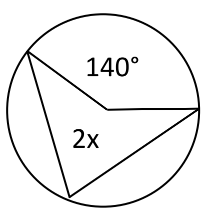

Calculamos el área del cuadrado y del círculo a partir del valor del lado-diámetro 5 y restamos:

El área del círculo es: $A_2 = \pi(2.5)^2$ es decir: $A_2 = 6.25\pi$

El área del cuadrado es: $A_1 = 5 \cdot 5$ es decir: $A_1 = 25$

Por lo tanto, el área del sector NO sombreado es la resta de las dos áreas: $25 - 6.25\pi$ unidades cuadradas.

6) La figura muestra un ángulo central de 140° y un ángulo sobre la circunferencia cuyo valor es 2x. ¿Cuál será el valor de x?




El ángulo menor es igual a la mitad del ángulo mayor, es decir:

$$2x = \frac{140°}{2}$$

$$2x = 70$$

$$x = 35$$

## FIGURAS TRIDIMENSIONALES.

Una figura geométrica tridimensional es la representación gráfica de que un objeto en sus tres dimensiones, es decir, representa los valores del largo, ancho y alto de la figura.

Tenemos distintas figuras tridimensionales entre las que se encuentran: prismas, pirámides, cilindros y conos.

Los prismas son poliedros cuyas caras básicas, paralelas entre sí, son dos polígonos iguales, siendo caras laterales paralelogramos. La base de un prisma siempre es un polígono y, en consecuencia, tenemos diversos prismas: prisma pentagonal, prisma hexagonal, etc.
Cuando el prisma tiene como base un cuadrado tendremos un prisma cuadrangular. Si las tres dimensiones coinciden tendremos un prisma conocido como cubo.
Para este tipo de figuras, el volumen de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa. La unidad principal es el $m^3$, aunque podemos pensar en *$cm^3$ o $dm^3$.*

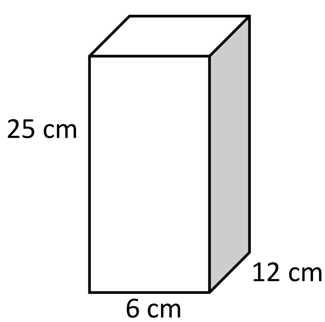
En general, el volumen de un prisma será el producto del área de la base por la altura, es decir:

$$V = Ab \cdot a$$

Donde $Ab$ = área de la base y $a$ = altura.

Ejemplo.

¿Cuál es el área de la base y el volumen de un prisma que tiene 6 cm de largo por 12 de ancho y tiene por altura 25 cm?




Para al área de la base:

$$A_{base} = (\ 6\ cm)(12\ cm) = 72\ cm^2$$

Para el volumen:

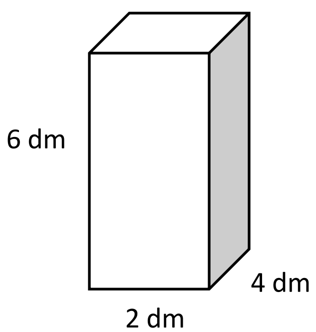
$$V = (72cm^2)(25\ cm) = 1800\ cm^3$$

Existen diversas aplicaciones para prismas relacionadas a volumen y capacidad. Sabemos que para calcular la capacidad, en litros, de un prisma debemos calcular el volumen y recordar que 1 $dm^3$ = 1 litro**.**

## Ejemplos.

1) Un prisma tiene 2 dm de ancho, de largo tiene el doble del ancho y de alto tiene el triple del ancho. ¿Cuántos litros tiene de capacidad?

Debemos calcular el valor del volumen.




Para al área de la base:

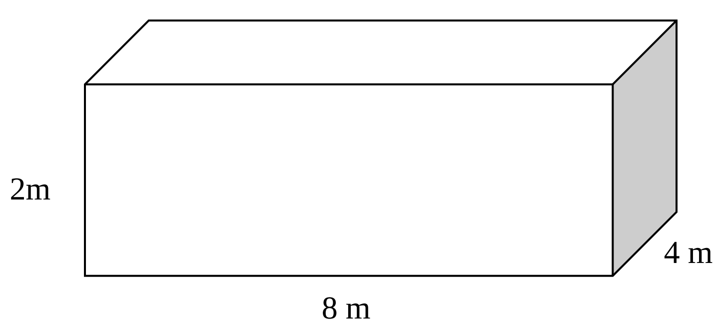
$$A_{base} = (\,4\ dm)(2\ dm) = 8\ dm^2$$

Para el volumen:

$$V = (8\ dm^2)(6\ dm) = 48\ dm^3$$

El prisma indicado tiene una capacidad de 48 litros

2) Un almacén tiene 8 m de largo, 4 m de ancho y 2 m de alto. Queremos guardar cajas sabiendo que caben 4 por cada $m^3$. ¿Cuántas cajas podrá contener el almacén?



Debemos calcular el valor del volumen en m$^3$ y multiplicar dicho volumen por 4.

Para al área de la base:

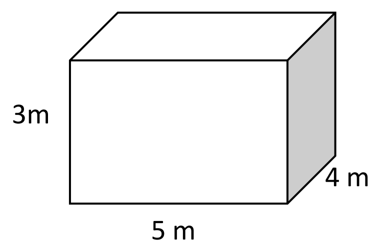
$$A_{base} = (\,8\ dm)(4\ dm) = 32\ dm^2$$

Para el volumen

$$V = (32\ dm^2)(2\ dm) = 64\ dm^3$$

El almacén indicado tiene capacidad para guardar 256 cajas.

3) La figura representa un contenedor que se utiliza para almacenar cajas cúbicas de $\frac{1}{4}$ metro de arista. ¿Cuál es el número MÁXIMO de cajas que se pueden almacenar en el contenedor?




El volumen del cubo es: $v_1 = (3m)(4m)(5m) = 60m^3$

El volumen de las cajas es: $v_2 = (0.25m)(0.25m)(0.25m) = 0.0156m^3$

Dividimos:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{60m^3}{0.0156m^3} = 3840$$

Otra manera de resolver es multiplicar cada arista por 4 (debido a $\frac{1}{4}$ metro de arista) y multiplicarlas entre sí:

$$cajas = (12)(16)(20) = 3840$$

## PLANO CARTESIANO.

El plano cartesiano es está formado por la intersección de dos rectas perpendiculares y toda la región que ellas abarcan. En el plano podemos representar puntos, distintas figuras y gráficas de funciones. El plano cartesiano permite un enlace entre el álgebra y la geometría.

Recordamos que en el plano tendremos dos ejes; el eje horizontal lo llamamos eje de las abscisas mientras que el eje vertical será el eje de las ordenadas. Asimismo, tendremos cuatro regiones donde ubicamos puntos de acuerdo a sus coordenadas.

Algunos conceptos básicos de los puntos, y las rectas formadas entre ellos, son la distancia, la pendiente y el punto medio.

Para calcular la distancia entre dos diferentes puntos de un plano cartesiano utilizamos la siguiente fórmula:

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La pendiente de un segmento de recta, o de una recta, lo podemos describir como el número asociado al ángulo de inclinación que se forma con el eje X.
Definimos la pendiente como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

El punto medio del segmento formado por dos puntos será $(x_3, y_3)$ donde las coordenadas se calculan con las fórmulas:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

En los tres casos siempre que $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$

Ejemplo.

Para los siguientes puntos calcula la distancia, el punto medio y la pendiente.
$P_1 = (6, -2)$ y $P_2 = (4,7)$

En este caso $x_1 = 6 \quad x_2 = 4 \quad y_1 = -2 \quad y_2 = 7$
Sustituimos los valores en las fórmulas respectivas.

Para la distancia.

$$P_1P_2 = \sqrt{(4-6)^2 + \left(7-(-2)\right)^2}$$
$$P_1P_2 = \sqrt{(-2)^2 + (9)^2}$$
$$P_1P_2 = \sqrt{4+81}$$
$$P_1P_2 = \sqrt{85}$$

Para la pendiente.

$$m = \frac{7-(-2)}{4-6}$$

$$m = -\frac{9}{2}$$

Para el punto medio.

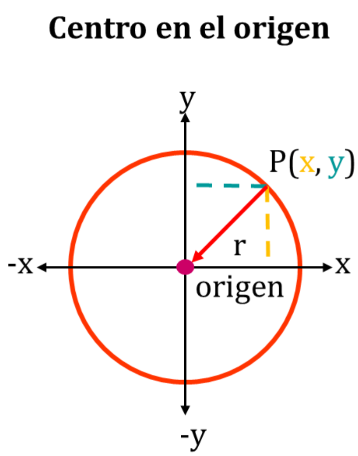
$$x_3 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

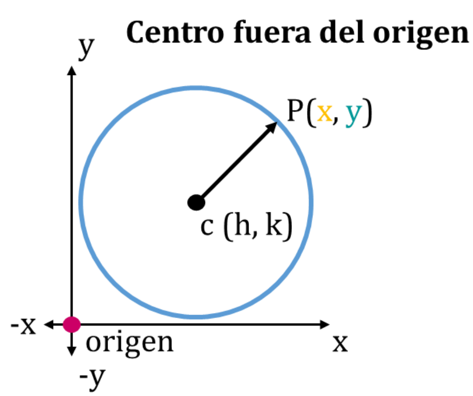
$$y_3 = \frac{-2+7}{2} = \frac{5}{2}$$

El punto medio es: $P_3 = \left(5, \frac{5}{2}\right)$

## CIRCUNFERENCIA

Puede definirse como **el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan a otro punto llamado centro**. Está pertenece a la clase de curvas conocidas como cónicas ya que, de igual forma, una circunferencia puede ser la intersección de una superficie cónica con un plano perpendicular a su eje.



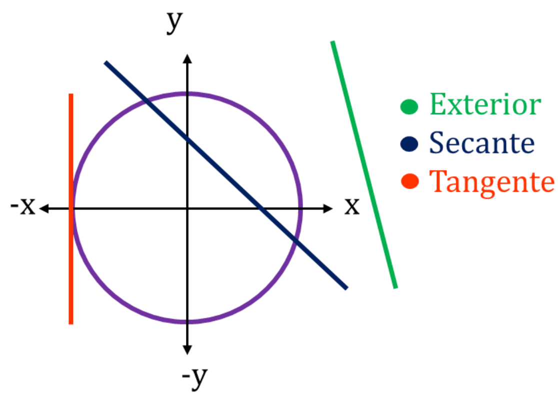

La forma más fácil de expresar una circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$, donde r es el radio, y el centro de la circunferencia se encuentra en el origen.

Cuando el centro se encuentra fuera del origen en el punto C (h, k), la ecuación de la circunferencia se representa como $(x – h)^2 + (y – k)^2 = r^2$.

Asimismo, también podemos escribir esta fórmula general, igualada a cero:
$x^2 + y^2 + r^2 = 0$, cuando el centro está en el origen.
$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, cuando el centro está en C = (h, k).

### Tipos de rectas

Existen también tres tipos de recta que pueden estar en una circunferencia: **la exterior,** que no se intersecta con la circunferencia; **la secante,** la cual toca dos puntos de la circunferencia y **la tangente** la cual sólo hace intersección con un punto en la circunferencia.




Por ejemplo, si tenemos una recta tangente y en lugar de la intersección trazamos una recta perpendicular, va a ser una recta secante con la característica que cruzará por el centro de la circunferencia.

Ejemplo:

1. Dada la ecuación $x^2 + y^2 + 4x – 8y – 25 = 0$, encuentra el centro y el radio de la circunferencia.

Primero, convertiremos la ecuación de una forma general a su forma simplificada. Para ello, pasaremos el término independiente al segundo miembro y agruparemos las letras iguales:
$x^2 + 4x \quad +y^2 – 8y \quad = 25$

Cómo pudiste observar, dejamos unos espacios en blanco después de 4x y 8y, esto es porque completaremos los trinomios cuadrados perfectos para poder factorizar las expresiones. Para esto, tomaremos el 4 del terminó 4x lo dividiremos entre 2, el resultado obtenido se elevará al cuadrado. Lo mismo haremos con el 8 de 8y.

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4 \qquad \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$$

Agregaremos estos números en ambos lados de la ecuación:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 25 + 4 + 16$$

Ahora, tenemos dos trinomios cuadros perfectos, los podemos factorizar y sumar los términos independientes del segundo miembro:

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 45$$

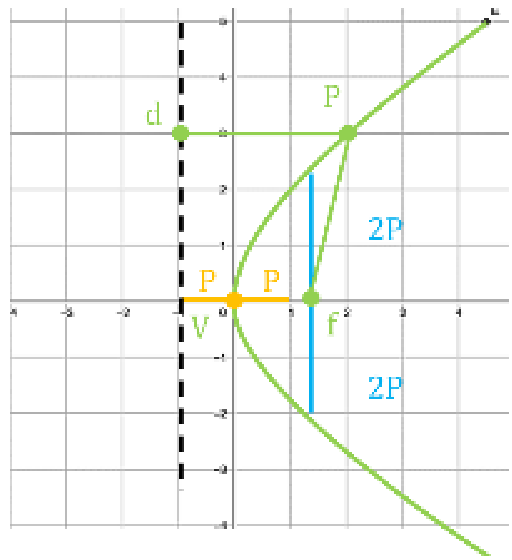
De la ecuación factorizada, podemos deducir los componentes de la circunferencia, pues:

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 45$$
$$h = -2;\ k= 4;\ r^2=45$$

A partir de la información anterior, descubriremos que el centro se encuentra en las coordenadas C (-2, 4) y que el radio será $r = \sqrt{45}$

## PARÁBOLA

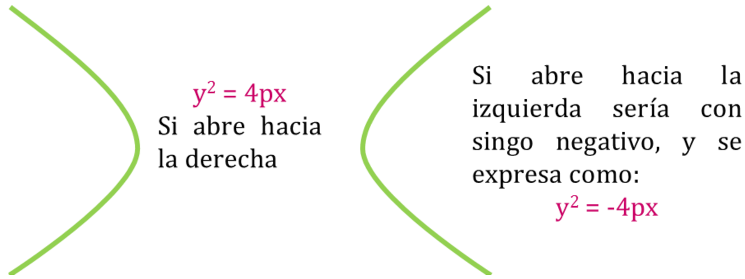
La parábola se puede definir como el lugar geométrico donde todos los puntos se encuentran a la misma distancia de un lugar llamado **foco** y una recta llamada **directriz.**




| Componentes de la parábola | |
|---|---|
| **d= directriz** | Es una línea de referencia, que siempre estará a la misma distancia del vértice al foco. |
| **V= vértice** | Es el punto donde abre la parábola, esto quiere decir que, si trazamos una recta de forma vertical, para las parábolas horizontales, sólo va a cruzar por un punto de manera tangencial con la parábola. |
| **F= foco** | Es un punto fijo en el cual, la distancia de éste a un punto P(x, y) sobre la parábola, siempre será igual a la distancia de dicho punto a la directriz. |
| **P= parámetro** | Es la distancia del foco al vértice. |
| **LR= Lado Recto** | Es el segmento de recta que corta al eje de simetría pasando por el foco. Mide 4p |

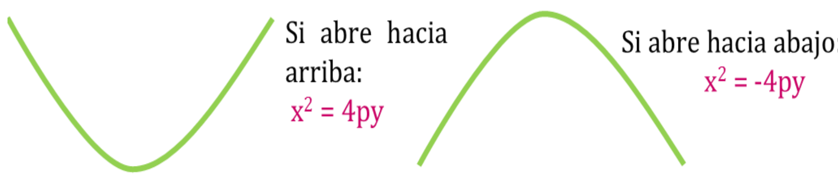
Existen dos tipos de parábolas: horizontales y verticales, y cada una de éstas puede ser de dos tipos, con vértice en el origen y con vértice fuera del origen.

**La parábola horizontal con vértice en el origen** se expresa de la siguiente manera:




**La parábola horizontal con vértice fuera del origen** se expresa de la siguiente manera: $(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$.

También tenemos **la parábola vertical con vértice en el origen.**




**La parábola vertical con vértice fuera del origen** se expresa de la siguiente manera: $(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$.

Resolvamos el siguiente ejercicio.

Dada la siguiente parábola: $(y-4)^2 = 12(x+4)$ encuentra el vértice, el foco y la directriz.

Primero tenemos que analizar que la y está al cuadrado por lo tanto es una parábola horizontal. Esto quiere decir que todos los desplazamientos van a ser sobre el eje x y no sobre el eje y.
Para encontrar el vértice podemos observar que se encuentra fuera del origen en el punto V (h, k).
Siguiendo la fórmula simplificada: 4p = 12.

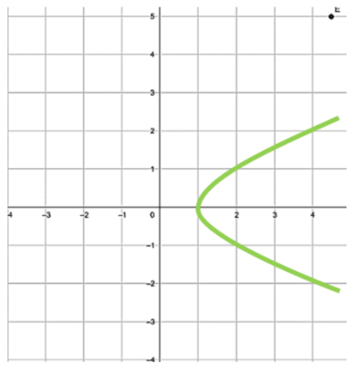
Por lo tanto: $p = \frac{12}{4} = 3$

El vértice se encuentra en el punto: V (-4, 4). *(El primer valor corresponde a "h" en la fórmula y el segundo a "k").*

Como se trata de una parábola horizontal, el desplazamiento sólo se lleva a cabo en el eje X. por lo tanto el foco se encuentra en: f (-4 + p,4)

Sustituiremos el parámetro y nos queda que: f (-4 + 3,4) que es f (-1,4)

**x = -4 – 3 =-7**



Para calcular la directriz recordaremos que la distancia del vértice al foco es la misma distancia del vértice a la directriz, sólo que en sentido opuesto.

En este caso la parábola es horizontal por lo que la directriz se representará con la letra x.

Resolvamos otro ejercicio.

Dada la ecuación: $x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$, encuentra el vértice, el foco y la directriz.

Si nos damos cuenta la ecuación está en su forma general, la pasaremos a su forma simplificada. Adicionalmente tenemos una X cuadrada por lo tanto sabemos que es una parábola vertical.
Lo primero que haremos será completar el trinomio cuadrado perfecto. Agrupamos las x en el primer miembro, y el resto en el segundo miembro: $x^2 - 6x = 8y - 25$

Completamos el trinomio cuadrado perfecto, dividiendo el 6 de 6x entre dos y elevado al cuadrado, el resultado se agrega en ambos lados de la ecuación:

$$\left(\frac{6}{-2}\right)^2 = 9$$

$$x^2 - 6x + 9 = 8y - 25 + 9$$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto y reduciendo los términos semejantes, nos queda la ecuación:

$$(x - 3)^2 = 8y - 16$$

Para que la ecuación quede en su forma simplificada, necesitamos factorizar el segundo miembro:

$$(x - 3)^2 = 8(y - 2).$$

De la ecuación en su forma simplificada, podemos deducir los componentes de la parábola: h = 3; k = 2; 4p =8.

Por lo tanto, el vértice se encuentra en V = (3, 2), el parámetro p =2. De aquí, podemos obtener la coordenada del foco: F = (3, 2+2) F = (3, 4).
La directriz es la recta horizontal de la ecuación: y = 2-2, y = 0.

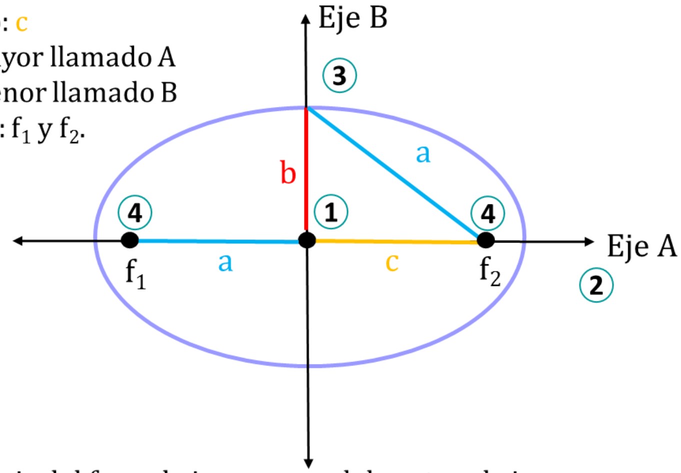
**Vértice en:** v = (3, 2) **Directriz:** y = 0

## ELIPSE

La elipse es el lugar geométrico en el que todos los puntos se mantienen a una misma distancia de dos puntos llamados focos.

En la elipse siempre vamos a contar con los siguientes elementos:

**1.-** Un centro: c
**2.-** Un eje mayor llamado A
**3.-** Un eje menor llamado B
**4.-** Dos focos: $f_1$ y $f_2$.




a Es la distancia del foco al eje menor, o del centro al eje mayor.
b Es del centro al eje menor.
c Del centro al foco.

Podemos notar que se forma un triángulo rectángulo por lo tanto podemos aplicar el teorema de Pitágoras que dice que: $a^2 = b^2 + c^2$

La **excentricidad** es la relación constante que existe entre las distancias de un punto a una recta fijos. Se representa con la letra e.

Si e = 0, la ecuación es de una **circunferencia.**

Si 0<e<1, la ecuación es de una **elipse.**

Si e = 1, la ecuación es de una **parábola.**

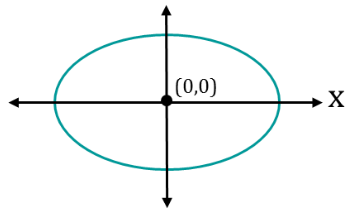
Si e>1, la ecuación es de una **hipérbola.**

La excentricidad de una elipse se calcula con la fórmula: $e = \frac{c}{a}$

Existen dos tipos de elipse: la **horizontal** y la **vertical.**

La elipse **horizontal** se plantea con la siguiente ecuación:

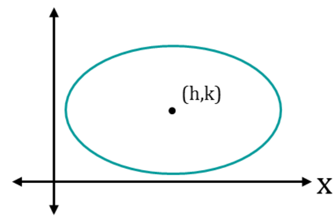
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$




Esto cuando el centro está en el origen (0,0).

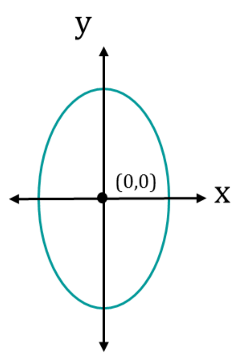
Cuando tiene centro en **h, k** es decir que no está en el origen, aplicamos el desplazamiento:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$




Si la elipse es **vertical,** lo único que va a cambiar son los ejes. Ahora el eje menor corresponde a X y el eje mayor corresponde a Y. Por lo tanto, nos queda:

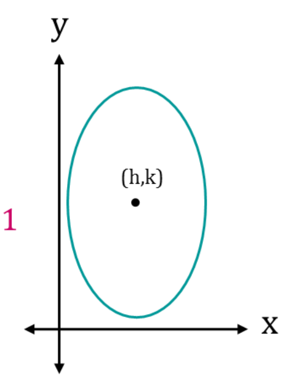
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$




Los ejes cambian:
Eje menor corresponde a "x".
Eje mayor corresponde a "y".

Para centro en **h, k** aplicamos un desplazamiento:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



Resolvamos un ejercicio.

1. Encuentra los elementos de la elipse con centro en el origen. Uno de sus focos está en (3, 0) y su eje mayor es = 10.

Lo primero que tenemos que analizar es de qué tipo de elipse estamos hablando. Si su foco está en 3,0 y su centro está en el origen, significa que es una elipse horizontal. Si el foco estuviera en 0,3 sería una elipse vertical

.

También debemos analizar su eje mayor, que es = 10, esto quiere decir que de lado a lado mide 10, por lo tanto: 2a = 10, a = 5

Ahora la distancia del centro a uno de sus focos, si el centro está en el origen y el foco está en 3,0, va a ser igual a 3. Por lo tanto: C = (0,0); F = (3,0); c = 3.

Recordamos la relación pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$.

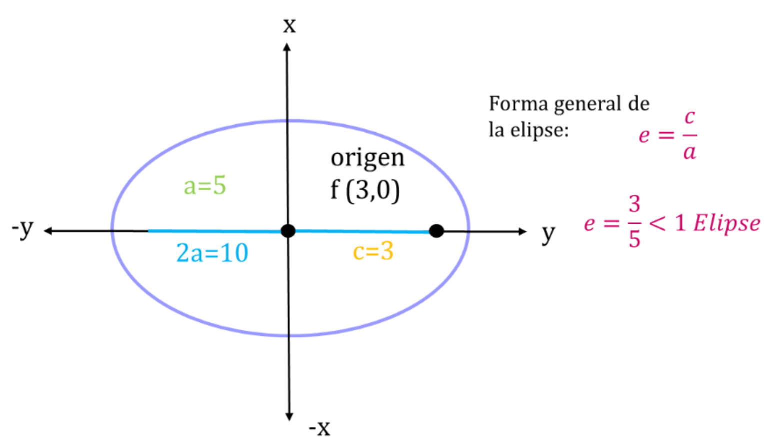
Despejemos en b: $b^2 = a^2 - c^2$.

$$b = \sqrt{(5)^2 - (3)^2} \quad b = \sqrt{9 - 15} \quad b = \sqrt{16} \quad b = 4$$

Vamos a escribirlo en su forma simplificada:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Ya contamos con los elementos y calculamos la excentricidad. Nos damos cuenta de que es menor a 1, por lo tanto, comprobamos que es una elipse.




Resolvamos otro ejercicio.

Dada la siguiente ecuación, encuentra el centro, los focos, los semi ejes y la excentricidad.

$$\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1 \qquad \mathbf{36 > 16}$$

Lo primero que hay que analizar es que se trata de una elipse vertical, debido a que el segundo dividendo es mayor al primero, y que es con centro en C = (h, k) ya que si fuera centro en el origen sería $x^2 + y^2 = 1$.

El centro lo sacamos de manera inmediata, está en C = (h, k) con signos opuestos, es: C (-4, 6)

Ahora, para los focos necesitamos sacar A, B y C. Recordamos que A es el semejante mayor, B es la raíz de 16 y con la relación pitagórica C es igual a raíz de 20.

$$a = \sqrt{36} \quad a = 6$$
$$b = \sqrt{16} \quad b = 4$$

Definimos c con la relación pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2$ $\quad c^2 = 6^2 - 4^2$

$$c = \sqrt{36 - 16} \quad c = \sqrt{20}$$

Calculemos la excentricidad:

$$e = \frac{c}{a} \quad e = \frac{c}{\sqrt{20}}$$

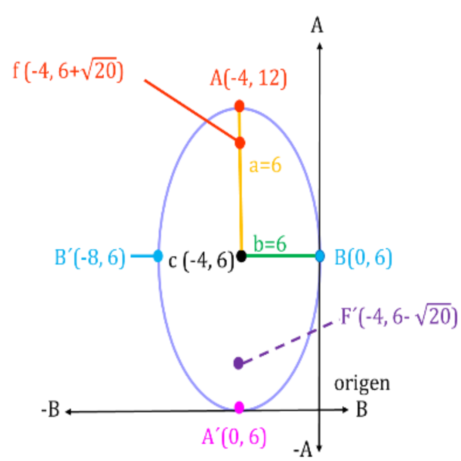
Para los focos tenemos que aplicarle el recorrido con c, pero al eje Y, debido a que es una **elipse vertical,** si fuera una elipse horizontal, aplicaríamos el recorrido al eje X, por lo tanto, nos queda:

$$F_1 = \left(-4, 6 + \sqrt{20}\,\right) \quad F_2 = (-4, 6 - \sqrt{20})$$

Para el eje A que es el eje mayor, como también es vertical, nos vamos a basar en el eje Y. Calcular eje A y A´. Lo podemos identificar con un cero:
A = (-4, 6+6) **A = (-4, 12)** A´= (-4, 6-6) **A´ = (-4, 0)**

Calcular eje B y B´:
B = (-4, +4, 6) **B = (0, 6)** B´= (-4, -4, 6) **B´= (-8, 6)**

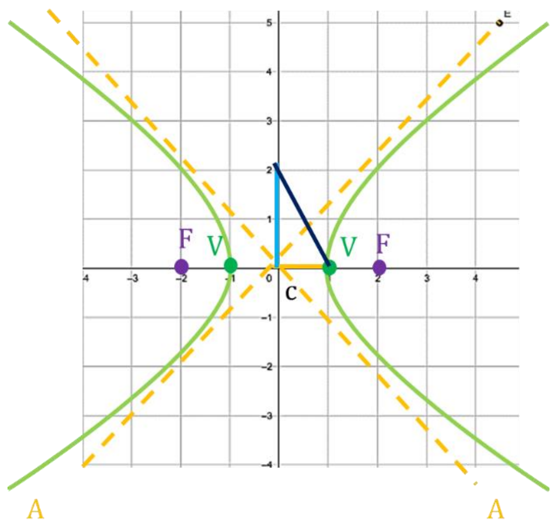
Visualmente queda de la siguiente manera:



## HIPÉRBOLA

La hipérbola se define como el lugar geométrico donde la diferencia de distancia a dos puntos, llamados focos, siempre será la misma.

Se puede relacionar con dos parábolas que son simétricas, en donde contamos con C centro, V vértice, F focos, A asíntotas, * semi eje mayor y * semi eje menor.




Las hipérbolas tienen la siguiente relación: $a^2 = b^2 + c^2$, donde C es la distancia del centro al foco y A es la distancia entre el centro y el vértice.

Adicionalmente tenemos las asíntotas, que son dos líneas rectas que se aproximan a la hipérbola, pero nunca la tocan. Para calcular estas rectas podemos decir que $y_1$ y $y_2$ se define como:

$$y_1 = \frac{b}{a} \qquad y_2 = -\frac{b}{a}x$$

Las hipérbolas también cuentan con una excentricidad.

$$\mathrm{e} = \frac{c}{a} > 1$$

Existen dos tipos de hipérbola, la horizontal y la vertical. Veamos sus características.

**Horizontal:** Tiene la siguiente ecuación simplificada. Centro en el origen, es decir en (0,0).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si tiene centro en C = (h,k) aplicamos el desplazamiento y nos queda:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

**Vertical:** Tiene la siguiente ecuación simplificada. Centro en el origen.

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Si tiene centro en $b=\sqrt{9}=3$ Aplicamos el desplazamiento y nos queda:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Resolvamos un ejercicio.

1. Encuentra los focos, vértices, excentricidad y asíntotas de la hipérbola $18x^2 - 32y^2 = 288$

La X es positiva y la Y negativa, por lo tanto, ésta es una **hipérbola horizontal.** No hay un desplazamiento en la X y la Y. Por lo tanto, la hipérbola se encuentra en el origen.

Para encontrar la excentricidad comenzamos dividiendo entre 288 para que la ecuación sea igual a 1.

$$\frac{18x^2}{288}-\frac{32y^2}{288}=\frac{288}{288}$$

Simplificamos y obtenemos:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

Ahora podemos sacar A, B y C

$$a=\sqrt{16}=4$$
$$b=\sqrt{9}=3$$

$c^2 = a^2 + b^2$

$$c^2=16+9=25$$

$$c=\sqrt{25}=5$$

La excentricidad es:

$$e=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}=\frac{5}{4}$$

El vértice es la distancia del centro al punto, por lo tanto, son: v = (4,0) v´= (-4,0).

Los focos son la distancia del centro a c. c es igual a 5 y el centro es el origen por lo tanto los focos quedan en f = (5, 0) y f´ = (5,0).

Para calcular las asíntotas recordamos que:

$$y=\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\mathrm{x}$$

Por lo tanto:

$$y=\frac{3}{4}x \quad y'=-\frac{3}{4}x$$

Resolvamos ahora otro ejercicio.

En la ecuación de la hipérbola F = (7,2), V = (5,2), C = (3,2). Encuentra la excentricidad y las asíntotas.

Lo primero que podemos observar es que la y no cambia, por lo tanto, es una **hipérbola horizontal.**

Recordemos que a es la distancia del vértice al centro.

a = 5 – 3

a = 2

c es la distancia del foco al centro, esto es:

c = 5 – 3

c = 4

b es igual a:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 2} \qquad b = \sqrt{12}$$

Recordemos la fórmula de la hipérbola.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ya tenemos el centro que es C = (3,2), tenemos a y b. Lo único que necesitamos hacer es sustituir. Obtenemos:

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{12} = 1$$

La excentricidad es:

$$e = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}} = \frac{4}{2} \qquad e = 2$$

Las asíntotas:

$$y = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\mathrm{x} \qquad \mathrm{y} = \frac{\sqrt{12}}{2}x \qquad y' = -\frac{\sqrt{12}}{2}x$$

## FUNCIONES.

Una función es una relación entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto corresponde un elemento del segundo. Dentro de la definición se establece de manera directa la existencia de dos conjuntos. Al primer conjunto se le llama *dominio* y al segundo se la llama rango *o contra dominio.* Las funciones se pueden representar de distintas maneras como puede ser tabular, analítica o gráfica.

Una función está en forma tabular cuando existe una tabla con los valores respectivos del dominio y del rango. Una función está en forma analítica cuando existe una regla de correspondencia entre los dos conjuntos. La función está en forma gráfica cuando ubicamos sus puntos en el plano cartesiano donde el eje X corresponde al dominio y el eje Y corresponde al rango. Para construir la forma gráfica nos apoyamos en la forma analítica.

Una forma de la representación analítica es la siguiente:

$x \rightarrow f(x) =$ Regla de correspondencia.

Donde la regla de correspondencia se indica a partir de expresiones matemáticas.

### Ejemplos.

1) Obtén los valores faltantes en la tabla e indica la regla de correspondencia en la función.

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 3 | 8 | 15 | a | b |

De acuerdo con la tabla anterior, la expresión que representa la función f(x) es:
$f(x) = x^2 + 2x$

Así que el valor de a será:
$f(4) = 4^2 + 2(4) = 16 + 8 = 24$

Mientras que el de b será:
$f(5) = 5^2 + 2(5) = 25 + 10 = 35$

Solo sustituimos el valor del dominio en la regla de correspondencia.

2) Hallar las imágenes de 4, 2 y – 1 del dominio en la función $f(x) = x^3 - x$

Sustituimos los valores del dominio en la regla de correspondencia.
$f(4) = (4)^3 - (4) = 64 - 4 = 60$
$f(2) = (2)^3 - (2) = 8 - 2 = 6$
$f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$

3) Si $f(x) = x^2$ indica el valor de $f(x+3) - f(-3)$.

Sustituimos los valores indicados para el dominio en la regla de correspondencia.
Si $f(x) = x^2$ entonces $f(x+3) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$
Si $f(x) = x^2$ entonces $f(-3) = (-3)^2 = 9$
Así que $f(x+3) - f(-3) = x^2 + 6x + 9 - 9$
$f(x+3) - f(-3) = x^2 + 6x$

4) Si $f(x) = x^2 + 5x - 1$ indica el valor de $f(1) - f(-1)$.

Sustituimos los valores indicados para el dominio en la regla de correspondencia.
Si $f(x) = x^2 + 5x - 1$ entonces $f(1) = (1)^2 + 5(1) - 1 = 1 + 5 - 1 = 5$
Si $f(x) = x^2 + 5x - 1$ entonces $f(-1) = (-1)^2 + 5(-1) - 1 = 1 - 5 - 1 = -5$
Así que $f(1) - f(-1) = 5 - (-5) = 10$

5) ¿Cuáles son las coordenadas de intersección con el eje de las ordenadas de la función $f(x) = (x+4)^2 - 25$?

Debemos sustituir el valor 0 del dominio en la regla de correspondencia.

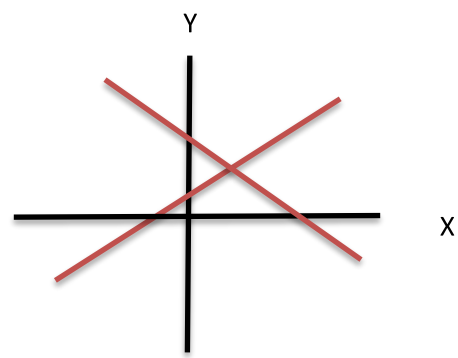
$$f(0) = (0+4)^2 - 25 = 4^2 - 25 = 16 - 25 = 9$$

Las coordenadas de intersección serán: $(0.9)$

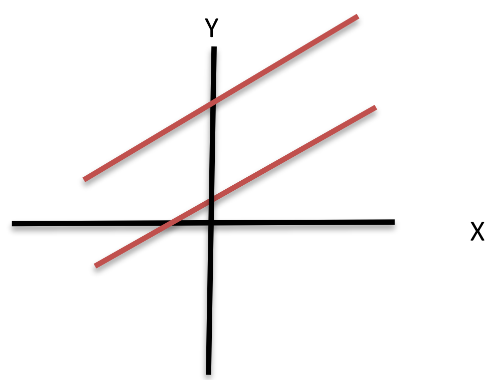
## RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Los sistemas de ecuaciones tienen una representación gráfica en un plano cartesiano ya que cada ecuación será, gráficamente, una línea recta y en consecuencia las dos ecuaciones deberán ser dos líneas rectas.

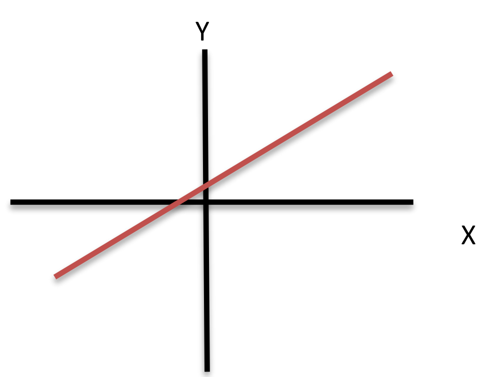
Si el sistema tiene una solución, las rectas se cortan en un punto que corresponde a las coordenadas de la solución.




Si el sistema no tiene solución las rectas no se cortan, es decir, son paralelas.




Si el sistema tiene infinitas soluciones las rectas son superpuestas y gráficamente solo se podrá ver una de ellas.



## SISTEMAS DE ECUACIONES.

Dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas son simultáneas cuando se satisfacen iguales valores de las incógnitas.

Por ejemplo, las ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Son simultáneas porque x= 3 y y=2 hacen verdaderas a ambas ecuaciones.

Existen muchas formas de resolver un sistema de ecuaciones, a continuación, estudiaremos los métodos de igualación, sustitución, reducción y determinantes.

**Método de eliminación por igualación.**

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 7x + 4y = 13 \\ 5x - 2y = 19 \end{cases}$$

Antes de iniciar, ponemos una marca que nos permita identificar cada una de las ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x + 4y = 13 \ (1) \\ 5x - 2y = 19 \ (2) \end{cases}$$

**Paso 1**: Despejar la variable elegida en ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x + 4y = 13 \ (1) \\ 5x - 2y = 19 \ (2) \end{cases}$$

$$(1)\ \ 7x + 4y = 13$$
$$(1)\ \ 7x = 13 - 4y$$
$$(1)\ \ x = \frac{13 - 4y}{7}$$

$$(2)\ \ 5x - 2y = 19$$
$$(2)\ \ 5x = 19 + 2y$$
$$(2)\ \ x = \frac{19 + 2y}{5}$$

**Paso 2**: Igualar.

Sabemos que en un sistema de ecuaciones el valor de x es el mismo en ambas ecuaciones, por lo tanto, podemos igualar las ecuaciones y nos queda la ecuación en términos de y.

$$(1)\ \ \mathrm{x} = \left(\frac{13 - 4y}{7}\right) \qquad (2)\ \ \mathrm{x} = \left(\frac{19 + 2y}{5}\right)$$

$$\frac{13-4y}{7}=\frac{19+2y}{5}$$

**Paso 3**: Encontrar el valor de y.

Ahora que tenemos una sola ecuación, podemos encontrar el valor de y despejándola.

$$\frac{13-4y}{7}=\frac{19+2y}{5}$$
$$5(13-4y)=7(19+2y)$$
$$65y-20y=113-64y$$
$$-20y-14y=113-65$$
$$-34y=68$$
$$y=\frac{68}{-34}$$
$$y=-2$$

**Paso 4**: Sustituir y=-2 en la ecuación (1).

Ahora que conocemos el valor de y, busquemos el valor de la x, para ello, sustituyamos el valor de y=-2 en cualquiera de las ecuaciones. Puedes aprovechar que las ecuaciones ya fueron despejadas.

$$(1)\quad x=\frac{13-4y}{7}$$
$$(1)\quad x=\frac{13-4(-2)}{7}$$
$$(1)\quad x=\frac{13+8}{7}$$
$$(1)\quad x=\frac{21}{7}$$
$$(1)\quad x=3$$

Por lo tanto, los valores que satisfacen a las ecuaciones simultáneas son:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$$

**Eliminación por sustitución.**

Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 5y = -24 & (1) \\ 8x - 3y = 19 & (2) \end{cases}$$

**Paso 1**: Despejar una variable en cualquiera de las ecuaciones.

Iniciamos despejando una incógnita en cualquiera de las dos ecuaciones.

$$(1) \qquad 2x + 5y = -24$$
$$2x = -24 - 5\text{y}$$
$$x = \frac{-24 - 5y}{2}$$

**Paso 2**: Sustituir en la otra ecuación.

Sustituimos la x en la otra ecuación.

$$(2) \qquad 8x - 3y = 19$$
$$8\left(\frac{-24 - 5y}{2}\right) - 3y = 19$$

**Paso 3**: Encontrar el valor de y.

Ahora tenemos una ecuación en términos de y, al resolverla, obtendremos el primer valor.

$$4(-24 - 5y) - 3y = 19$$
$$-96 - 20y - 3y = 19$$
$$-96 - 23y = 19 + 96$$
$$-23y = 115$$
$$y = \frac{115}{-23}$$
$$y = -5$$

**Paso 4**: Sustituir y=-5 en cualquiera de las ecuaciones.

¡Ya hemos hecho la parte difícil! Ahora, sustituyamos el valor encontrado, y=-5 en cualquiera de las dos ecuaciones. Toma en cuenta que ya tienes despejada la ecuación (1).

$$(1)\quad x=\frac{-24-5y}{2}$$
$$x=\frac{-24-5(-5)}{2}$$
$$x=\frac{-24+25}{2}$$
$$x=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, los valores que satisfacen al sistema de ecuaciones son:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-5 \end{cases}$$

**Método de reducción.**

Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} 10x+9y=8 & (1) \\ 8x-15y=-1 & (2) \end{cases}$$

Primero, debemos seleccionar una variable para eliminar, para nuestro ejemplo, seleccionamos la variable x. Procura simpe elegir la variable que consideres más sencilla de eliminar.

$$\begin{cases} 10x+9y=8 & (1) \\ 8x-15y=-1 & (2) \end{cases}$$

**Paso 1**: Encontrar el m.c.m. de los coeficientes de la variable seleccionada.

Buscamos el mínimo común múltiplo de los coeficientes de la variable seleccionada, para efectos del ejemplo, el m.c.m. de 10 y 8 es 40.

**Paso 2**: Multiplicar las ecuaciones.

A continuación, multiplicaremos ambas ecuaciones por un número que multiplicado, convierta al coeficiente de la x en 40. Para ello, multiplicamos la ecuación (1) por 4 y la ecuación (2) por 5:

$$\begin{cases} 4(10x+9y)=4(8) & (1) \\ 5(8x-15y)=5(-1) & (2) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 40x+36y=32 & (1) \\ 40x-75y=-5 & (2) \end{cases}$$

*Si es necesario, cambia el signo de la segunda ecuación.*

Como los coeficientes de la x tienen el mismo signo, cambiaremos el signo de la ecuación de abajo, la segunda ecuación nos queda como:

$$\begin{cases} 40x + 36y = 32 & (1) \\ -40x - 75y = 5 & (2) \end{cases}$$

**Paso 3:** Sumar algebraicamente las ecuaciones.

Al sumar algebraicamente las fracciones, obtendremos una ecuación de una sola variable.

$$\begin{cases} 40x + 36y = 32 & (1) \\ -40x - 75y = 5 & (2) \end{cases}$$

$$111y = 37$$

$$y = \frac{37}{111}$$

$$y = \frac{1}{3}$$

**Paso 4:** Sustituir $y = \frac{1}{3}$ en cualquiera de las dos ecuaciones.

Al sustituir el valor de y, encontraremos el valor de x, puedes elegir cualquiera de las ecuaciones:

$$(1) 10x + 9y = 8$$

$$(1) 10x + 9\left(\frac{1}{3}\right) = 8$$

$$10x + 3 = 8$$

$$10x = 8 - 3$$

$$10x = \frac{5}{10}$$

$$10x = \frac{1}{2}$$

Ahora ya sabemos que los valores que satisfacen al sistema de ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

**Solución por determinantes.**

El método de solución por determinantes tiene la ventaja de que no se requiere despejar ninguna variable, además de ser un método muy gráfico y rápido.

Resolvamos el sistema:

$$5x + 3y = 5$$
$$4x + 7y = 27$$

Lo más importante en este método es observar que las variables queden ordenadas en ambas ecuaciones para que nos queden columnas, es decir, nos quedará una columna para la x, una columna para las y, y una columna para los resultados:

$$5x + 3y = 5$$
$$4x + 7y = 27$$

Empecemos obteniendo el valor para la x.

Para resolver, dibujaremos una H.

$$x = \left|\begin{array}{c} \\ \hline \\ \end{array}\right|$$

Ahora, en la parte inferior de la H, escribiremos la matriz del sistema, ésta estará formada por los coeficientes de las incógnitas. Recuerda que debes tomar en cuenta el coeficiente con todo y su signo. Seguramente, ya notaste que la *matriz del sistema* está formada por las columnas de la x y de la y.

$$x = \left|\begin{array}{cc} & \\ \hline 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{array}\right|$$

Arriba haremos lo mismo, pero con un pequeño cambio, escribimos la matriz del sistema, pero, como estamos calculando el valor de x, cambiaremos la columna de las x y, en su lugar, pondremos la columna de los resultados.

$$x = \left|\begin{array}{cc} 5 & 3 \\ 27 & 7 \\ \hline 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{array}\right|$$

Ahora multiplicaremos los números de la matriz en diagonal, es decir, para la matriz de arriba, multiplicaremos 5x7 y 27x7, pero ¡cuidado!, pues cuando multipliques de abajo hacia arriba, deberás invertir la ley de signos. Para la matriz de abajo, multiplicaremos 5x4 y 4x3.

$$x = \left|\begin{array}{cc} 5 & 3 \\ 27 & 7 \\ \hline 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{array}\right| = \frac{35 - 81}{20 - 12}$$

Al resolver la operación resultante, tendremos que:

$$x = \left|\frac{\begin{matrix}5 & 3\\ 27 & 7\end{matrix}}{\begin{matrix}5 & 3\\ 4 & 7\end{matrix}}\right| = \frac{35-81}{20-12} = -\frac{46}{23} = -2$$

Para obtener la y haremos los mismo, pero sustituye por lo que tendremos la matriz 5, 5, 4 y 27. La matriz del sistema se queda igual.

$$y = \left|\frac{\begin{matrix}5 & 5\\ 4 & 27\end{matrix}}{\begin{matrix}5 & 3\\ 4 & 4\end{matrix}}\right|$$

Resolviendo los determinantes, tendremos que:

$$y = \left|\frac{\begin{matrix}5 & 5\\ 4 & 27\end{matrix}}{\begin{matrix}5 & 3\\ 4 & 4\end{matrix}}\right| = \frac{135-20}{20-12} = \frac{115}{23} = 5$$

Por lo tanto, encontramos que los valores que satisfacen a este sistema de ecuaciones son:

$$\begin{cases} \mathrm{x} = -2 \\ y \;\; = 5 \end{cases}$$

# DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO VARIACIONAL

## ANÁLISIS DE FUNCIONES

### FAMILIA DE FUNCIONES.

Una función algebraica es aquella en la que todos sus términos están dados en funciones algebraicas y no intervienen términos exponenciales, logarítmicos o trigonométricos. Se dividen, parcialmente, en tres tipos: polinomiales, racionales y radicales.

**Funciones algebraicas polinomiales:**

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_nx^0$

Donde $x^0=1$

n= grado máximo de la función

**Funciones algebraicas racionales:**

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

**Funciones algebraicas de raíz:**

$$f(x)=\sqrt[n]{p(x)}$$

- Funciones algebraicas polinomiales:
  Se escriben de la forma $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_nx^0$ sucesivamente hasta llegar a an ($x^0$) donde $x^0$ es 1. El grado del polinomio será el del exponente más grande de la x. Es conocido que algunas de las funciones polinomiales reciben un nombre especial según el grado polinomial, por ejemplo: y = ax + b, es una función lineal.

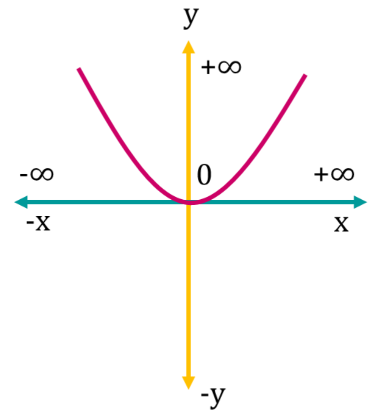
- Funciones algebraicas racionales:
  Consiste en un polinomial de sobre otro polinomial.

- Funciones algebraicas de raíz:
  Se define como la raíz enésima de un polinomial de x.

### CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES.

Las características principales de las funciones algebraicas son el **dominio,** y el **rango** y la **función inversa.** El dominio representa el **valor del eje** x para el cual f(x) existe.

Por ejemplo, en la función graficada a continuación, x puede tomar cualquier valor desde menos infinito hasta infinito y no se indetermina en ningún punto.



**Funciones algebraicas polinomiales.**

**El dominio** representa el valor del eje **x** para el cual **f(x)** existe.

**El rango** representa los valores que pueden ser considerados en una función con respecto al eje **y**.

**Función inversa**

x → y        y → x

y = x   →  x = $\sqrt{y}$

El **rango** representa los **valores que pueden ser considerados** en la función con respecto al **eje** y.

En el ejemplo que vemos, y podrá tomar cualquier valor desde cero hasta infinito, ya que la función se extiende hasta el infinito sin incluir valores negativos.

Para calcular una función inversa debemos invertir las x en y y las y en x para posteriormente despejar la x y resolver.

Revisemos un ejemplo donde quedará más claro cómo se aplican estos conceptos.

Calcula el rango y el dominio de: $y = \frac{x-2}{x+3}$

Para calcular el dominio debemos encontrar los valores de x en los cuales la función existe. Recordemos que cualquier número sobre 0 es indeterminado por lo que igualaremos el denominador a 0.

| | | |
|---|---|---|
| $y = \dfrac{x-2}{x+3}$ | x + 3 = 0 | x = -3 |

Por lo tanto, la x puede tomar cualquier valor excepto -3 ya que con -3 la función se indetermina. El dominio se representa:

$$D_f = \{ x \in R \mid x \neq -3\}$$

Ahora bien, para calcular el rango primero debemos encontrar la función inversa. Sustituiremos las y por x y las x por y.

$$x = \frac{y-2}{y+3}$$

Hay que despejar y. Pasamos y + 3 multiplicando y nos queda:

$$(y + 3)\, x = y - 2$$

Multiplicando:

$$xy + 3x = y - 2$$

Pasamos lo que tiene y de un lado y lo que tiene y del otro lado de la ecuación:

$$xy - y = -2 - 3x$$

Factorizamos y:

$$y\,(x - 1) = -2 - 3x$$

Como x-1 está multiplicando y se debe pasar del otro lado dividiendo. Encontramos que:

$$y = \frac{-2 - 3x}{(x - 1)}$$

Ahora que hemos despejado a la y, debemos encontrar, al igual que en el dominio, cuáles son los valores de y en los cuales la función existe.

Igualamos el denominador a 0 y nos queda que: x=1  x-1=0

Por lo tanto y puede tomar cualquier valor excepto 1 ya que con 1 la función se indetermina.

El rango se representa de la siguiente manera:

$$R_f = \{\, y \in R \mid y \neq 1 \}$$

Veamos otro ejemplo, ahora considerando graficar la función:

Calcula el dominio, el rango y realiza un bosquejo de la gráfica de la siguiente función: $y=x^2-9$.

En este ejemplo, x podrá tomar cualquier valor sin que la función se indetermine, por lo tanto, x **podrá ser cualquier número real** y ése será el **dominio**.

$$D_f = \{x \in R\}$$

Para realizar un bosquejo de la gráfica debemos tomar algunos valores tentativos de x y, y sustituirlos en la función para conocer algunos puntos de cruce x y. Es recomendable utilizar un par de números negativos, el 0 y un par de números positivos. Los ordenaremos en una tabla de la siguiente manera:

$y = x^2 - 9$
$y = (-2)^2 - 9 = -5$
$y = (-1)^2 - 9 = -8$
$y = (0)^2 - 9 = -9$
$y = (1)^2 - 9 = -8$
$y = (1)^2 - 9 = -5$

Ahora debemos sustituir cada uno de estos números en la función y determinar el valor de y.

| x | y |
|---|---|
| -2 | -5 |
| -1 | -8 |
| 0 | -9 |
| 1 | -8 |
| 2 | -5 |

Al realizar el cruce de cada uno de los puntos en el plano x y, te darás cuenta que la función es una parábola simétrica que cruza el eje y en y = -9. Este, además, será el punto más bajo del eje y ya que hacia ambos lados la dirección de la función es positiva en el eje y.

Podemos también conocer los puntos en los que la función cruzará el eje x igualando y a 0.

$y = x^2 - 9 \rightarrow 0 = x^2 - 9 \qquad x^2 - 9 = 0$

$x = \sqrt{9}$

---

Por lo tanto la función cruzará el eje
x en x = +3y – 3.
(3, 0) (-3, 0)

---

Para calcular el rango iniciaremos con la función inversa.

y = x2 – 9 → x = y2 – 9

Despejamos a y:

$$y = \sqrt{x + 9}$$

Recuerda que no existen raíces cuadrada negativas, por lo tanto, el discriminante será: $x + 9 \geq 0$

---

Despejamos x en la desigualdad: $x \geq -9$

---

x es mayor o igual a -9, por lo que y podrá tomar cualquier valor mayor que -9 para que la función sea determinada.

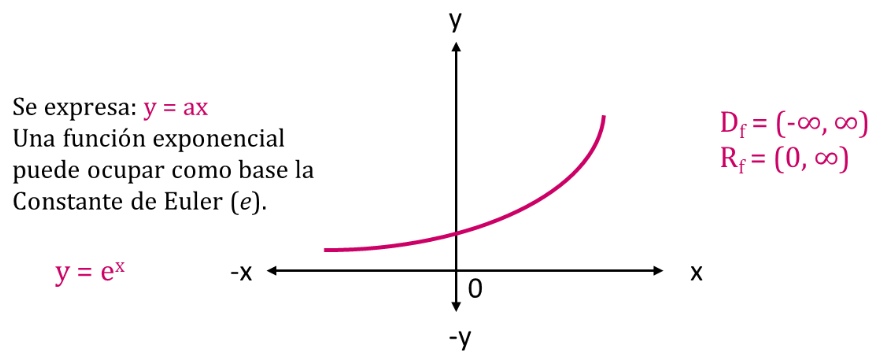
---

El rango se expresa de la siguiente manera: cualquier valor de -9 hasta infinito.

$$R_f = [-9, \infty)$$

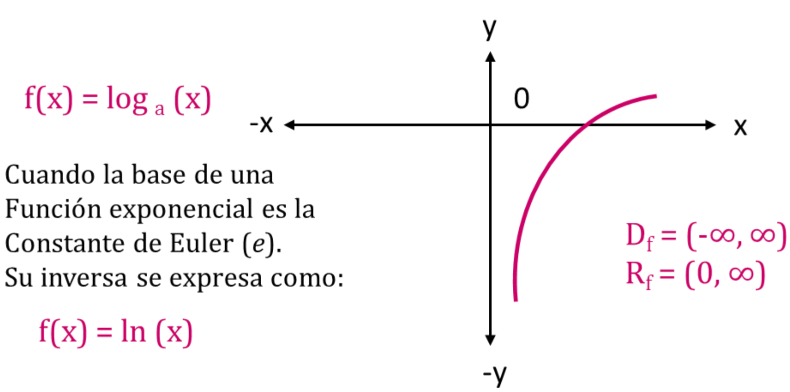
**Propiedades de los logaritmos y potencias.**

La función exponencial se expresa como $f(x) = a^x$, siendo $a$ cualquier número real mayor que cero. También, una función exponencial puede tener como base la **constante de Euler** (e≈2.718281…), definida como un número irracional que representa la diferencia entre una serie armónica y el logaritmo natural. Gráficamente, la función se vería así:




**Su dominio es representando de menos infinito hasta infinito, y su rango va desde 0 hasta infinito y tiene como asíntota al eje x. (Asíntota horizontal)**
Recordamos que una asíntota es una recta a la que la gráfica se acerca de manera infinita pero nunca la toca.

Por otro lado, la función inversa de una exponencial es conocida como la **función logarítmica** y se expresa como:




Cuando la base de una función exponencial es la constante de Euler, su inversa se expresa como el logaritmo natural de x.
**Su dominio es el rango de la función exponencial, es decir, todos los números mayores que 0, y su rango es el dominio de la función exponencial que va desde menos infinito hasta infinito. Tiene como asíntota al eje Y. (Asíntota vertical)**

## Exponentes y logaritmos

Debido a que la inversa de un logaritmo es la potencia, si tenemos que $\log_a x = y$, entonces $a^y = x$. Es decir, estamos despejando la variable $x$ del logaritmo aplicando la notación exponencial.

### Propiedades de los logaritmos y exponentes

Entiendo que la notación logarítmica es una forma de escribir potencias, podemos decir, entonces, que las propiedades de los logaritmos son las mismas que las propiedades de los exponentes.

| | |
|---|---|
| 1.- El logaritmo de una multiplicación, es igual a la suma de los logaritmos de los productos.<br><br>$\text{Log}_a (x \cdot y) = \log_a (x) + \log_a (y)$ | 2.- Una base elevada a un exponente multiplicada por la misma base elevada a otro exponente, es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.<br><br>$(a^x)(a^y) = a^{x+y}$ |
| 3.- El logaritmo de una división es igual a la resta de los dividendos.<br><br>$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$ | 4.- Una base elevada a un exponente dividida entre la misma base es igual a la base elevada a la resta de los exponentes.<br><br>$\frac{a^x}{a^y} = a^{x+y}$ |
| 5.- El logaritmo base a de una variable elevada a un exponente es igual al valor del exponente multiplicado por el logaritmo.<br><br>$log_a(x^y) = y\, log_a(x)$ | 6.- Si es necesario hacer un cambio de base A a base B:<br><br>$log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$ |
| 7.- Si se tiene un logaritmo y no se especifica la base por defecto ésta es 10.<br><br>$log\ (x) = log_{10}\ (x)$ | 8.- Por otro lado, si se especifica un logaritmo natural la base por defecto es e.<br><br>$log_e\ (x) = ln\ (x)$ |

**Funciones pares e impares.**

Otro importante conjunto de funciones son las llamadas pares e impares.
Decimos que una función es par si son simétricas respecto al eje Y, es decir si cumplen con la siguiente característica:

La función f(x) es par si f(x) = f(– x)

Por otro lado, las funciones impares son simétricas respecto al origen y cumplen la siguiente característica:

La función f(x) es impar si f(x) = – f(– x)

Para saber si una función es par o impar podemos apoyarnos en la gráfica de la misma o bien evaluar algunos valores de su dominio y su respectivo inverso aditivo.

Ejemplos.

1. Indica si la función f(x) = $x^2$ + 1 es par o impar.

Debemos hallar la imagen de un elemento, y su inverso aditivo, por ejemplo 2 y – 2

$$f(2) = 2^2 + 1$$
$$f(2) = 4 + 1$$
$$f(2) = 5$$

Ahora hallamos la imagen de – 2

$$f(-2) = (-2)^2 + 1$$
$$f(-2) = 4 + 1$$
$$f(-2) = 5$$

Como los valores son iguales (y eso sucede en todo el dominio), la función es par.

2. Indica si la función f(x) = $x^3$ es par o impar.

Debemos hallar la imagen de un elemento, y su inverso aditivo, por ejemplo 4 y – 4

$$f(4) = 4^3$$
$$f(4) = 64$$

Ahora hallamos la imagen de – 4

$$f(-4) = (-4)^3$$
$$f(-4) = -64$$

Debemos observar si los valores cumplen con la propiedad si f(x) = – f(– x)

f(4) = – f (– 4 )

64 = – ( – 64 )

La función es impar ya que sucede lo mismo con todos los valores del dominio.

## TRANSFORMACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES.

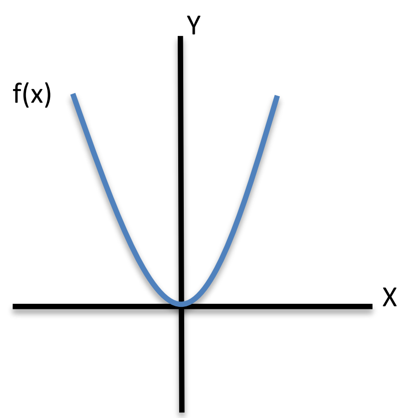
Una función puede graficarse en un plano cartesiano, pero, además, esta función puede sufrir transformaciones en su gráfica si previamente realizamos algunos cambios en el argumento de la misma. Las principales transformaciones son aquellas que trasladan la gráfica hacia la derecha, hacia la izquierda, hacia arriba o hacia abajo.

Consideremos las siguientes definiciones:
A) Si a partir de la función $f(x)$ obtenemos la función $g(x) = f(x) + c$ entonces:
1.- si $c > 0$ la gráfica de $g(x)$ es la traslación de la gráfica de $f(x)$ c unidades hacia arriba.
2.- si $c < 0$ la gráfica de $g(x)$ es la traslación de la gráfica de $f(x)$ c unidades hacia abajo.

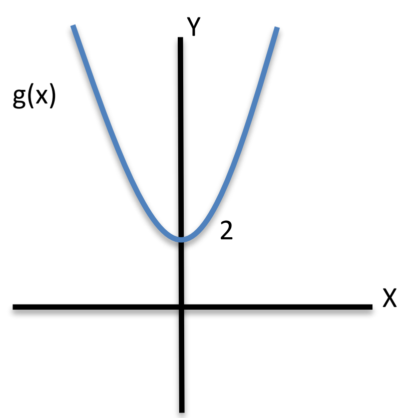
B) Si a partir de la función $f(x)$ obtenemos la función $g(x) = f(x + c)$ entonces:
1.- si $c > 0$ la gráfica de $g(x)$ es la traslación de la gráfica de $f(x)$ c unidades hacia la izquierda
2.- si $c < 0$ la gráfica de $g(x)$ es la traslación de la gráfica de $f(x)$ c unidades hacia la derecha.

Ejemplo.

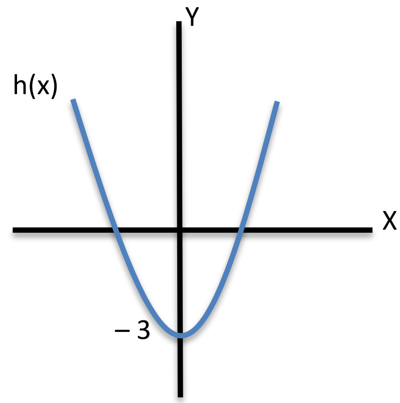
Supongamos que la función $f(x)$ se representa gráficamente de la siguiente manera:



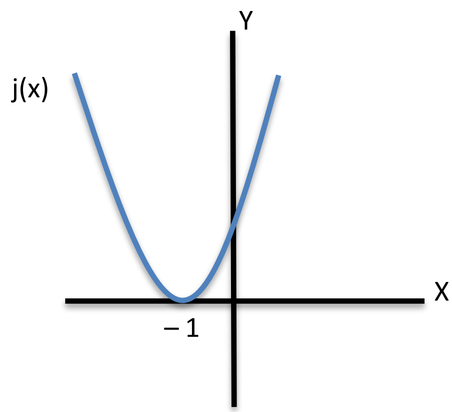

La función $g(x) = f(x) + 2$ deberá tener su gráfica de la siguiente manera:



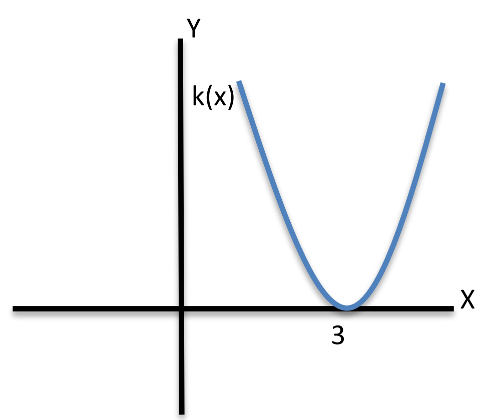
La función h(x) = f(x) – 3 deberá tener su gráfica de la siguiente manera:




La función j(x) = f(x + 1) deberá tener su gráfica de la siguiente manera:




La función k(x) = f(x - 3) deberá tener su gráfica de la siguiente manera:



## SOLUCIÓN DE ECUACIONES E INECUACIONES.

Una ecuación es un caso particular de igualdad que se cumple para cierta cantidad de valores.
De acuerdo al teorema fundamental del álgebra, una ecuación de primer grado tiene una solución; una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones; una ecuación de tercer grado tiene tres soluciones y así sucesivamente.

El grado de una ecuación se puede obtener del máximo exponente de su variable. Para resolver una ecuación utilizamos las propiedades de la igualdad, que resumimos de la siguiente forma:

*En una igualdad, todo término que se traspone lo hace con operación contraria.*

Ejemplos.

1) Resolver la ecuación: $5x + 6 = 0$

Debemos despejar x

El 6 que suma se traspone restando $5x = -6$

El 5 que multiplica se traspone dividiendo

$$x = -\frac{6}{5}$$

2) Resolver la ecuación: $7x + 2 - 2x + 10 = x + 5 - 4x + 17$

Simplificamos términos semejantes en cada parte de la igualdad.

$$5x + 12 = -3x + 22$$

Agrupamos términos semejantes.

$$5x + 3x = 22 - 12$$

Simplificamos.

$$8x = 10$$

Despejamos.

$$x = \frac{10}{8}$$

3) Resolver la ecuación: $\frac{8}{a+4} = 5$

El denominador que divide se traspone multiplicando.

$$8 = (5)(a + 4)$$

Multiplicamos.

$$8 = 5a + 20$$

Agrupamos términos.

$$8 - 20 = 5a$$

Despejamos la variable.

$$-\frac{12}{5} = a$$

4) Resolver la ecuación: $m^2 - 3m = 10$

Reordenamos la ecuación.

$$m^2 - 3m - 10 = 0$$

Factorizamos.

$$(m - 5)(m + 2) = 0$$

Igualamos cada factor con cero para encontrar cada una de las dos soluciones.

$m - 5 = 0$ Entonces $m_1 = 5$

$m + 2 = 0$ Entonces $m_2 = -2$

5) Resolver la ecuación: $b^3 = 4b^2$

Agrupamos la variable respetando las propiedades de la igualdad.

$$\frac{b^3}{b^2} = 4$$

Simplificamos utilizando leyes de exponentes.

$$b = 4$$

Una desigualdad o inecuación es una expresión algebraica que está formada por dos miembros separados por un símbolo de desigualdad. Este símbolo puede ser $<, >, \leq\ y \geq$.

Las inecuaciones, a diferencia de las ecuaciones, tienen como solución a intervalos de números que pueden, o no, incluir a los extremos del mismo.

En los casos $\leq y \geq$ el valor extremo del intervalo está incluido en la solución mientras que en $< y >$ no lo está. Si un valor extremo es ∞ ó −∞ estrictamente usamos $< o >$.

Al igual que en las ecuaciones, resolver una inecuación es hallar el o los valores que la hacen cierta, solo que las inecuaciones tienen infinitas soluciones agrupadas en un conjunto. Para representar estos conjuntos solución de forma simbólica, se utilizan paréntesis ( , ) para el caso de $< y >$ o bien se utilizan [ , ] para el caso de $\leq y \geq$ .

Para resolver una inecuación se realizan los mismos pasos que en la solución de una ecuación, excepto en el caso en que se necesita multiplicar ambos miembros de la inecuación por un número negativo; en esos casos se debe cambiar el sentido de la desigualdad.

Ejemplos.

1) Hallar el conjunto solución para la siguiente desigualdad $6 < 2x - 4 \leq 12$ es:

$$6 < 2x - 4 \leq 12$$
$$6 + 4 < 2x \leq 12 + 4$$
$$10 < 2x \leq 16$$
$$\frac{10}{2} < x \leq \frac{16}{2}$$
$$5 < x \leq 8$$

La solución también se representa como (5, 8]

2) ¿Cuál es el intervalo solución de la expresión $|x + 2| < 5$ ?

$$|x + 2| < 5$$
$$-5 < x + 2 < 5$$
$$-5 - 2 < x < 5 - 2$$
$$-7 < x < 3$$

También representamos la solución como: $(-7, 3)$

3) Hallar el conjunto solución de la inecuación $|4x + 1| \leq 15$

$$|4x + 1| \leq 15$$
$$-15 \leq 4x + 1 \leq 15$$
$$-15 - 1 \leq 4x \leq 15 - 1$$
$$-16 \leq 4x \leq 14$$
$$-4 \leq x \leq \frac{14}{4}$$

También representamos la solución como: $\left[-4, \frac{14}{4}\right]$

## Propiedades gráficas de una función.

Una importante representación de una función, es su forma gráfica. Entendemos por gráfica a la recta o a la curva ubicada en un plano cartesiano. Para construir la gráfica de una función debemos considerar a la representación analítica y su forma en pares ordenados, ya que estos últimos son los que se ubican en el plano. Es decir, de la forma analítica obtenemos pares ordenados, estos se ubican en el plano y finalmente los unimos para formar la representación gráfica. El eje X corresponde al dominio; el eje Y corresponde al rango.

Un elemento más de la importancia de la representación gráfica de una función es la facilidad con que esta permite conocer diversas propiedades de la función con solo observarla. Es tan importante la gráfica que con ella sabremos si existe, o no, una función.

Para poder analizar las propiedades, debemos tener una gráfica correcta y exacta. Algunas de las propiedades son las siguientes:

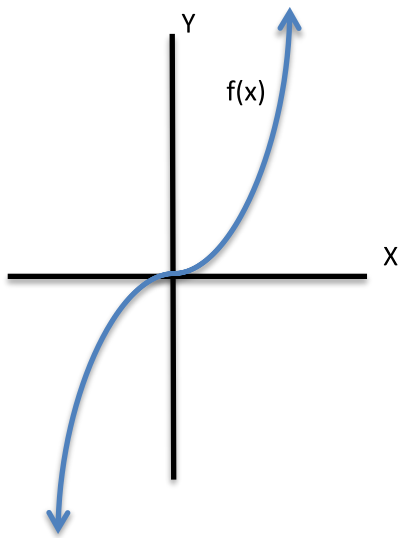
- Sabemos que una gráfica corresponde a una función si al trazar (de manera imaginaria) paralelas al eje Y, todas cortan a la gráfica en un solo punto.
- Sabemos que una función es inyectiva cuando al trazar paralelas al eje x, estas cortan a la gráfica como máximo en un solo punto.
- Sabemos que una función es sobreyectiva cuando al trazar paralelas al eje x, estas cortan a la gráfica como mínimo en un punto.
- Sabemos que una función es biyectiva cuando al trazar paralelas al eje x, estas cortan a la gráfica exactamente en un punto.
- Una función es continua cuando su gráfica no presenta rupturas o cortes. En caso contrario se la llama discontinua.
- Una función es derivable cuando es continua y además su gráfica no presenta cambios bruscos (picos).
- Una función es constante cuando su gráfica es paralela al eje X.
- Una función es estrictamente creciente cuando al analizarse de izquierda a derecha, las imágenes siempre aumentan.
- Una función es estrictamente decreciente cuando al analizarse de izquierda a derecha, las imágenes siempre disminuyen.
- Una función es creciente cuando al analizarse de izquierda a derecha, las imágenes aumentan o son constantes.
- Una función es decreciente cuando al analizarse de izquierda a derecha, las imágenes disminuyen o son constantes.

Podemos establecer un criterio algebraico para los últimos conceptos a partir del análisis de cualquier par de valores del dominio y el comportamiento de sus respectivas imágenes.

Sean a y b dos valores cualesquiera del dominio de una función f y tales que a < b.
1. Si $f(a) = f(b)$ entonces la función es constante.
2. Si $f(a) < f(b)$ entonces la función es estrictamente creciente.
3. Si $f(a) > f(b)$ entonces la función es estrictamente decreciente.
4. Si $f(a) \leq f(b)$ entonces la función es creciente.
5. Si $f(a) \geq f(b)$ entonces la función es decreciente.

Ejemplo.

Indica las propiedades de la función f(x) a partir de su gráfica.




Tenemos una función: Inyectiva
Sobreyectiva
Biyectiva
Continua
Derivable
Creciente

Para encontrar las intersecciones con los ejes cartesianos de una función y su gráfica bastará hacer las evaluaciones respectivas. Es decir, si queremos hallar la intersección con el eje Y debemos sustituir en la función el valor 0 del dominio y hacer las operaciones. Si queremos la intersección con el eje X debemos darle el valor cero al rango y despejar el o los valores de x.

Ejemplos.

1. Hallar la intersección con el eje Y de la función $f(x) = 5x + 2$

Consideramos x = 0 y sustituimos

$$f(0) = 5(0) + 2 = 0 + 2 = 2$$

La intersección será en y = 2 que podemos representar con el par ordenado (0,2)

2. Hallar la intersección con el eje X de la función $f(x) = x^2 - 1$

Consideramos $f(x) = 0$ y despejamos

$$0 = x^2 - 1$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{1}$$

Las intersecciones serán en x = 1 y x = – 1 que podemos representar con los pares ordenados (1,0) y (– 1, 0).

La gráfica de una función puede ser trasladada a cualquier lado de los ejes considerando un cambio en el argumento de la función.

Si a partir de la función f(x) obtenemos la función g(x) = f(x) + c entonces:
1.- si c > 0 la gráfica de g(x) es la traslación de la gráfica de f(x) c unidades hacia arriba.
2.- si c < 0 la gráfica de g(x) es la traslación de la gráfica de f(x) c unidades hacia abajo.

Si a partir de la función f(x) obtenemos la función g(x) = f(x + c) entonces:
1.- si c > 0 la gráfica de g(x) es la traslación de la gráfica de f(x) c unidades hacia la izquierda
2.- si c < 0 la gráfica de g(x) es la traslación de la gráfica de f(x) c unidades hacia la derecha.

En todos los casos anteriores tendremos graficas muy parecidas, o bien la misma pero con una traslación indicada por el valor de la constante c.

Otro aspecto importante a considerar en la gráfica de una función son los máximos y mínimos relativos así como los máximos y mínimos absolutos.

**Máximo relativo.-** Sea (a, b) un intervalo del dominio de una función f y c un valor dentro de ese intervalo. Si f(c) > f(x) para todo valor de x en el intervalo (a, b) entonces f(c) será un máximo relativo.

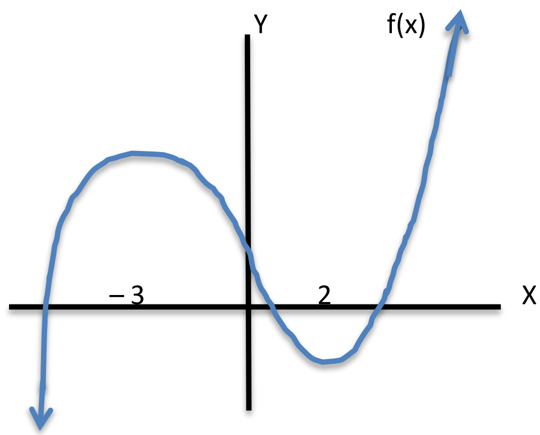
**Mínimo relativo.-** Sea (a, b) un intervalo del dominio de una función f y c un valor dentro de ese intervalo. Si f(c) < f(x) para todo valor de x en el intervalo (a, b) entonces f(c) será un mínimo relativo.

Las definiciones de máximo y mínimo absoluto serán muy similares solo que el intervalo (a, b) será sustituido por todo el dominio de la función. No es obligatoria la existencia de máximos relativos o absolutos ni de mínimos relativos o absolutos pero, en caso de existir, solo puede haber un máximo absoluto y un mínimo absoluto a diferencia de los máximos o mínimos relativos que pueden ser varios en una sola función.

Ejemplo.

La función f(x) tiene un máximo relativo en x = – 3 y un mínimo relativo en x = 2

No tiene máximo ni mínimo absoluto.



## LÍMITES.

En esencia un límite matemático se refiere a **la aproximación hacia un punto concreto o una función,** es decir, se acercan al valor sin tocarlo.

**Existen tres formas de resolver un límite.**

La primera es por medio de **sustitución,** sustituimos el valor del límite en la función. Si nos da un valor real hemos resuelto el límite, si no, debemos de buscar resolver el límite a través de otros dos métodos: **simplificar por método de factorizaciones o multiplicar en el conjunto.**

También hay límites cuando: a → ∞ o a →0.

Por lo tanto, es necesario conocer las siguientes reglas:

| | |
|---|---|
| Infinito sobre infinito es indeterminado $\frac{\infty}{\infty} = \infty$ | Cero sobre cero es indeterminado. $\frac{0}{0} = \infty$ |
| Una constante sobre infinito es cero. $\frac{c}{\infty} = 0$ | Cero sobre una constante es cero. $\frac{0}{c} = 0$ |
| Infinito sobre una constante es infinito. $\frac{\infty}{c} = \infty$ | Una constante sobre cero es infinito. $\frac{c}{0} = \infty$ |
| Infinito sobre cero es infinito. $\frac{\infty}{0} = \infty$ | Cero sobre infinito es cero $\frac{0}{\infty} = 0$ |

Si las constantes son negativas entonces los infinitos cambiarán a ser menos infinito.
-a → -∞

Resolvamos un ejercicio.

Resuelve el límite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Lo primero que vamos a hacer es sustituir el 2 por la X. Nos queda:

$$\frac{(2)^2-4}{(2)-2} \qquad \frac{4-4}{(2)-2} \qquad \frac{0}{0}=\infty$$

Esto es igual a 0/0 por lo tanto el límite es **indeterminado.**

La siguiente ecuación la podemos factorizar como una diferencia de cuadrados, por lo tanto, nos queda:

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

Cancelamos x-2 sobre x-2 ya que esto es igual a 1. Nos queda x+2.

Ahora podemos sustituir el límite cuando x tiende a 2. 2 +2 =4

Resolvamos otro ejercicio.

Resuelve el límite cuando:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{x^2} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{(0)^2} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{0} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{0}=\infty$$

Si sustituimos el cero nos da igual a infinito. Vemos que no podemos factorizar.

Si observamos con atención, la diferencia entre estos dos límites es que el cero, si toma valores muy pequeños, al elevarlos al cuadrado se vuelven positivos y el número tenderá a ser infinito positivo.

Tenemos otro límite cuando X tiende a 0 de 1/x, el cual no existe.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\mathrm{x}} \quad \frac{1}{0}=\nexists$$

Veamos otro ejercicio.

Resuelve el siguiente límite, cuando x tiende a 3 de la función:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=$$

Lo primero que vamos a hacer es sustituir la x por 3. Por lo tanto, la función queda de la siguiente manera:

$$\frac{(3)^2-9}{(3)^2-5(3)+6}=\frac{9-9}{9-15+6}=\frac{0}{-6+6}=\frac{0}{0}=\infty$$

Ahora podemos factorizar ambos términos.

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$$

El término de abajo lo vamos a factorizar con dos números que multiplicados nos den 6 y sumados nos den 5. Estos son: -3 y -2. Una vez factorizados nos queda:

$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-2)} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

Después de simplificar y sustituir el 3 por la x:

$$\frac{(x+3)}{(x-2)} = \frac{(3+3)}{(3-2)} = \frac{6}{1} = 6$$

Ahora resolvamos un límite cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x\to\infty} -x^4 + 20x^3 + 100x^2 + 1000$$

En este caso hay que buscar cuál es el término con mayor grado, el cual es: $-x^4$

Al sumar infinito, el que tenga mayor grado de polinomio va a ser el símbolo que queda –(∞)4.

Por lo tanto, en este caso el límite es negativo infinito -∞.

Resolvamos otro caso.

Cuando x tiende a negativo infinito de e a la x:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x}$$

Por definición es igual al límite cuando x tiende a infinito de $e^{-x}$:

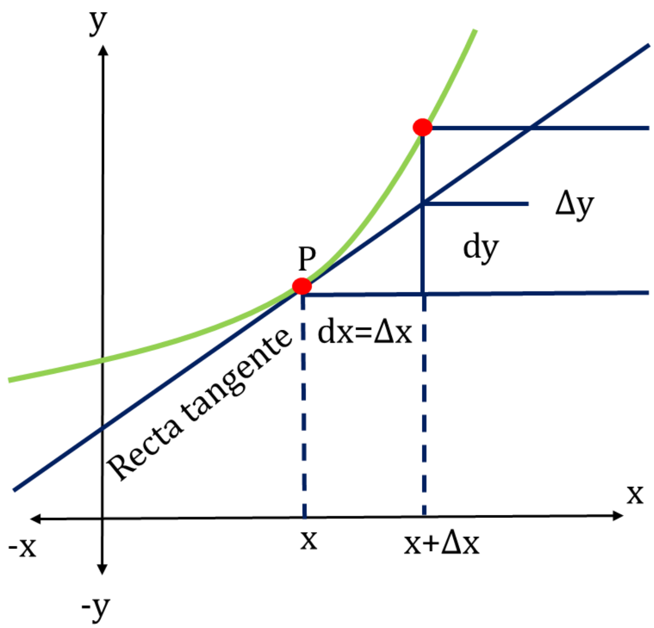
$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}$$

Pasamos el e elevado a la –x y nos queda el límite de x cuando tiende a infinito positivo de 1 sobre $e^x$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Como resultado en este caso el límite es 0.

**LA DERIVADA.**




La derivada es la **pendiente de la recta tangente** a una función en un punto dado.

## Reglas

**Fórmulas para derivar**

| | | |
|---|---|---|
| Derivada de una constante | Derivada de $x^n$ | Derivada de u·v |
| $\frac{d}{dx}(c) = 0$ | $\frac{d}{dx}(x^m) = nx^{n-1}$ | $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ |
| Derivada de $\frac{u}{v}$ | Derivada de Ln u | Derivada de $e^v$ |
| $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ | $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx}$ | $\frac{d}{dx}(e^v) = e^v\frac{dv}{dx}$ |

**Principales fórmulas trigonométricas**

| | |
|---|---|
| Derivada de sen (v) | Derivada de cos (v) |
| $\frac{dsen(v)}{dx} = \cos(\mathrm{v})\frac{dv}{dx}$ | $\frac{dcos(v)}{dx} = -\mathrm{sen}(\mathrm{v})\frac{dv}{dx}$ |

Resolvamos un ejercicio:

Calcula las siguientes derivadas con respecto a x de las siguientes funciones:

| | | |
|---|---|---|
| $f(x)=x^5$ | Aplicar la fórmula nxn-1 | $5x^4$ |
| $f(x)= \ln x$ | Aplicar la fórmula $\frac{du}{dx}(\frac{1}{x})$ | $\frac{1}{x}$ |
| $f(x)= \operatorname{sen}(2x)$ | Aplicar la fórmula $\cos(v)\frac{dv}{dx}$ | $2\cos(2x)$ |
| $f(x)\frac{1}{x}$ | Aplicar la fórmula $nx^{n-1}$ | $x^{-1} - 1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ |
| $f(x) = e^{-x^2}$ | Aplicar la fórmula $\frac{dv}{dx}e^v$ | $-2xe^{-x^2}$ |
| $f(x)=a^3$ | Aplicar la fórmula $\frac{dc}{dx} = 0$ | 0 |

Resolvamos un ejercicio más complejo:

Calcula la siguiente derivada con respecto a x: $f(x) = (2x^2-4)^5 e^{-2x}$

Esta es una multiplicación de dos funciones, por lo tanto, vamos a dividirla en u y v.

$$\frac{du \cdot dv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

| | | |
|---|---|---|
| $u = (2x^2-4)^5$ | $u = (2x^2-4)^{5-1}$ Al exponente restamos 1 | $u = (2x^2-4)^5$ El exponente 5 pasa como multiplicador. |
| Nos queda: $du = 5(2x^2-4)^4$ | $du = 5(2x^2-4)^4(4x)$ | |
| El valor de v lo tomamos como: $v=e^{-2x}$ | $\frac{de^v}{dx} = \frac{dv}{dx}e^v$ | Nos queda: $dv=-2e^{-2x}$ |
| **Aplicamos la fórmula** u(dv) + v(du) | | |
| **Nos queda la derivada** $-2e^{-2x}(2x^2-4)^5 + 20x(2x^2-4)^4e^{-2x}$ | | |

## Máximos y mínimos.

En el siguiente ejemplo encontraremos máximos y mínimos utilizando derivadas.
Calcula los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 10$$

La cantidad de máximos y mínimos es igual al grado del polinomio menos uno. Este es un polinomio de tercer grado, que quiere decir que vamos a contar con dos máximos o mínimos.

Si este fuera un polinomio de segundo grado contaríamos con 1 y si fuera uno de 4° contaríamos con 3.

Calculamos la derivada de una suma que es igual a la suma de sus derivadas, por lo que tenemos:

Derivando, tendremos que:

$$(x^3 - 2x^2 + x - 10) = 3x^2 - 4x + 1$$

A continuación, igualamos la derivada con cero, para obtener los **puntos de inflexión,** es decir, los puntos donde la función cambia de dirección. En estos puntos, la pendiente de la función es igual a cero.

$$3x^2-4x+1=0$$

Queda una ecuación de segundo grado, la cual podemos resolver con la fórmula general o factorizando. En este caso, lo haremos con la fórmula general.

| | | |
|---|---|---|
| $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ | El coeficiente de $x^2$ es 3<br>a = 3 | El coeficiente de x es -4<br>b = -4 |
| El coeficiente de x es -4<br>b = -4 | El término c es 1<br>c = 1 | $x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Resolvemos:<br>$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6}$ | Por lo tanto:<br>$x_1 = \frac{4+2}{6}$ | $x_1 = \frac{6}{6}$ | $x_1 = 1$ |
| | $x_2 = \frac{4-2}{6}$ | $x_2 = \frac{2}{6}$ | $x_2 = \frac{1}{3}$ |

Para sacar el máximo y mínimo sustituimos en la función original:

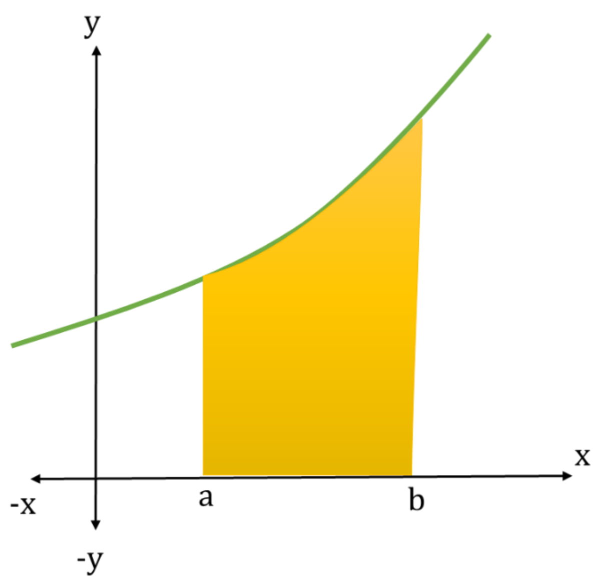
$$X^3-2x^2+x-10=0$$

Sustituimos el 1 y nos queda: $(1)^3-2(1)^2+(1)-10$.

Esto nos da -8. Por lo tanto, el punto sería: (1, -8)

| Sustituimos x por 1/3 | Nos queda: | El punto sería: |
|---|---|---|
| $\left(\frac{1}{3}\right)^3-2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)-10$ | -9.85 | $\left(\frac{1}{3},-9.85\right)$ |

La integración es el proceso inverso de la derivación, **representa el área bajo la curva.**



## OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA.

La optimización matemática, también conocida como programación matemática, es un método que permite encontrar el valor máximo o mínimo de una función, sujeto a ciertas restricciones. Esta técnica se utiliza en una amplia gama de campos, incluidas las finanzas, la ingeniería y la investigación de operaciones.

Algunos de los beneficios de la optimización matemática son los siguientes:

***Toma de decisiones mejorada***. La optimización matemática ayuda a identificar el mejor curso de acción en una situación dada, considerando todas las opciones disponibles y seleccionando la que produce el mejor resultado.

***Mayor eficiencia.*** Al encontrar la solución óptima a un problema, la optimización matemática puede ayudar a reducir el desperdicio y la ineficiencia, lo que genera ahorros de costos y una mayor productividad.

***Modelado mejorado.*** La optimización matemática proporciona una poderosa herramienta para modelar sistemas complejos y predecir su comportamiento, lo que puede ser útil para una variedad de aplicaciones, desde logística y gestión de la cadena de suministro hasta pronósticos financieros.

***Mayor flexibilidad.*** Muchos algoritmos de optimización matemática se pueden adaptar fácilmente para manejar cambios en las restricciones u objetivos del problema, lo que los hace útiles para lidiar con la incertidumbre y las situaciones cambiantes.

***Mejor comprensión***. Al analizar las soluciones producidas por la optimización matemática, es posible obtener información sobre la estructura subyacente y el comportamiento del sistema que se está estudiando, lo que puede conducir a una mejor comprensión del problema en cuestión.

Optimizar una función consiste en encontrar sus valores máximos y mínimos, esto significa que hay que encontrar los valores en el dominio de la función para los cuales se alcanza el máximo y mínimo en el rango. El proceso de optimización es parte de una de las aplicaciones más importante de la derivada. Para poder optimizar en forma correcta es importante recordar las derivadas más comunes y utilizadas.

Se recomiendan los siguientes pasos para resolver problemas de optimización.

1. De las condiciones del problema extraer o plantear la función a **maximizar o minimizar**.

2. En el caso de que en el problema intervengan más de una variable, plantear ecuaciones que relacionen las distintas variables del sistema.
3. Despejar una variable de la ecuación y sustituirla en la función de modo que nos quede una función con una sola variable.
4. Encontrar los extremos locales, esto significa que debemos igualar la función a cero y resolver la ecuación resultante.

Ejemplos.

1.- En una lámina de cartón, de 80 cm de largo por 50 cm de ancho, queremos recortar en cada esquina un cuadrado de lado x para doblarlo de tal manera se construye una caja. Calcular x para que el volumen de dicha caja sea máximo.


Primero debemos encontrar la función a optimizar. Esta función es definida por el volumen de la caja, la cual tiene como lados $80 - 2x$ y $50 - 2x$, además la altura es $x$. Así nuestra función es:

$$V = (80 - 2x)(50 - 2x)(x)$$

Desarrollando tenemos: $$V = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$$

Ahora debemos buscar los extremos locales. Recordemos que para esto derivamos la función, la igualamos con cero y resolvemos.

Derivamos la función

$$V' = 12x^2 - 520x + 4000$$

Igualamos con cero

$$12x^2 - 520x + 4000 = 0$$

Resolvemos con la fórmula general de ecuaciones de segundo grado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde a = 12, b = – 520 y c = 4000

Es decir

$$x = \frac{-(-520) \pm \sqrt{(-520)^2 - 4(12)(4000)}}{2(12)}$$

Al desarrollar las operaciones obtenemos dos soluciones $x_1 = 10$ y $x_2 = 33.3$

Podemos observar que la segunda solución no es válida ya que nos daría un valor negativo para uno de los lados. Específicamente 50 – 2(33.3) = 50 – 66.6 = – 16.6

En consecuencia, la única solución válida es x = 10

2. Se pretende fabricar una lata de conserva cilíndrica, con tapa, de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal?

Del enunciado podemos concluir que debemos minimizar la función que define el área de la lata cilíndrica, la cual está dada por

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Donde r es el radio y h la altura.

Observamos que el primer sumando corresponde al área lateral y el segundo al área de las dos bases.

Como la lata debe contener un litro entonces su volumen es igual a 1, por lo cual

$$V = \pi r^2 h = 1$$

Debemos despejar el valor h para obtener

$$h = \frac{1}{\pi r^2}$$

Sustituimos ahora el valor de h en la fórmula del área total del cilindro

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Es decir

$$A = 2\pi r(\frac{1}{\pi r^2}) + 2\pi r^2$$

$$A = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$$

Derivamos la función A

$$A' = \frac{-2}{r^2} + 4\pi r$$

$$A' = \frac{-2 + 4\pi r^3}{r^2}$$

Para hallar los valores extremos igualamos la ecuación anterior a cero y despejamos el valor de r

$$\frac{-2+4\pi r^3}{r^2} = 0$$

$$r^3 = \frac{1}{2\pi}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

Finalmente sustituimos el valor hallado de r en la ecuación para h

$$h = \frac{1}{\pi r^2}$$

Es decir

$$h = \frac{1}{\pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^2}$$

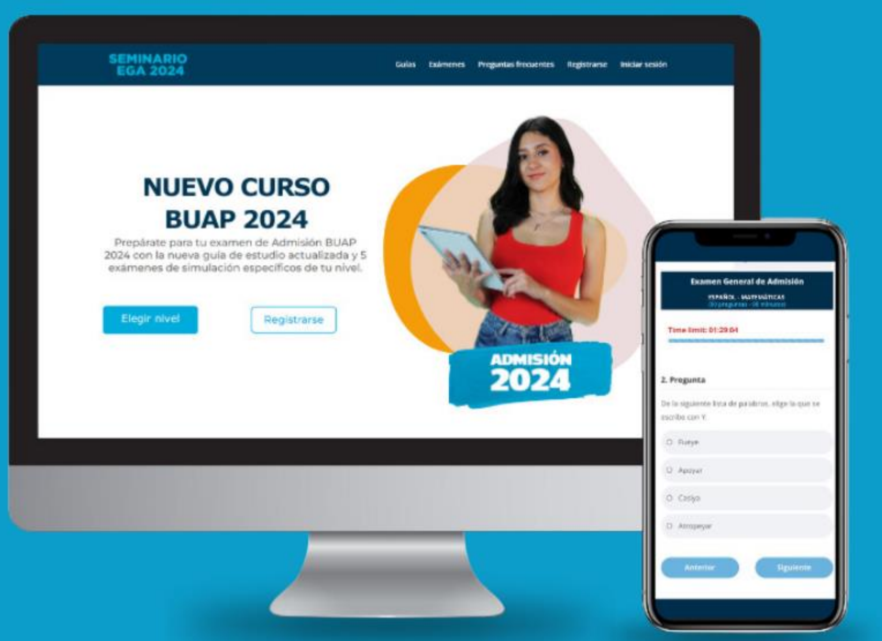
Al desarrollar obtenemos la expresión buscada para h

$$h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

Por lo tanto con los valores $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ y $h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ podemos construir la lata buscada con dimensiones mínimas.

¡Aspirante, recuerda contestar tus 5 exámenes de simulación!

Además, no olvides complementar tu preparación con el nuevo **Curso de Admisión BUAP 2024,** al que tendrás acceso a partir del día 15 de Abril dentro de tu cuenta en la plataforma **Seminario EGA.**




www.seminarioega.com

# ESTADÍSTICA Y TOMA DE DECISIONES RAZONADAS

## TOMA DE DECISIONES RAZONADA Y SU IMPORTANCIA

### Estadística Inferencial o Inductiva.

Se llama estadística inferencial a la rama de la Estadística encargada de hacer deducciones, es decir, inferir propiedades, conclusiones y tendencias, a partir de una muestra del conjunto. Su papel es interpretar, hacer proyecciones y comparaciones.
Sólo se centra en tomar una pequeña muestra representativa de la población y a partir de la información de la misma, infiere que el resto de los elementos de la población tienen el mismo comportamiento. En caso de que un muestreo para cierto estudio no sea factible realizarlo por cuestiones de tiempo, recursos o costo; se puede calcular un tamaño de muestra para medir solo algunos elementos de la población; posteriormente se infiere que el resto de los elementos de la población se comportan igual que la muestra tomada

Una **Muestra** es cualquier subconjunto de la población seleccionado para la investigación. Una Muestra aleatoria es un subconjunto que ha sido seleccionado mediante un método azaroso o aleatorio. Para que una muestra aleatoria sea útil para una investigación, se requiere que sea representativa de la población, es decir, que sus elementos recojan características esenciales de los elementos que componen la población. El tamaño de la muestra será denotado por **n**.

Ejemplos de muestras en una población:

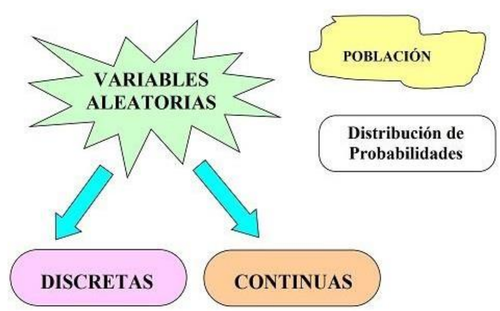
**A)** 10 tiendas de sillas con ventas anuales mayores a 5,000 unidades en la Ciudad de Puebla, Pue. Durante los años de 2016 a 2020, seleccionadas aleatoriamente.

**B)** En cada uno de los siguientes estados: Sinaloa, Jalisco, Michoacán y Oaxaca se capturaron aleatoriamente 12 aves durante los meses de marzo a junio de 2020.

Las características de interés en una población o una muestra se llaman **variables**.

**Datos**, son los valores que toma una variable de estudio en cada individuo de la muestra o de la población.

**Variables discretas:** Son aquellas que solo pueden adoptar un solo valor numérico, entero, con valores intermedios que carecen de sentido, ejemplos:
- El número de estudiantes que tiene un salón de clase.
- El número de computadoras que funcionan en una empresa.




**Variables continuas:** Son aquellas que toman cualquier valor dentro de un rango numérico

determinado, ejemplos:
- La cantidad de minutos que gasta una persona en llenar 5 galones de agua.
- La estatura de los integrantes del equipo de baloncesto de la escuela.
- El valor del pasaje del Autobús.

Estimación de parámetros o **variables estadísticas**, permite estimar valores poblacionales a partir de muestras de mucho menor tamaño.

## Estadística Descriptiva.

Es aquella parte de la investigación estadística que incluye la obtención, organización, presentación y descripción de información numérica.
Dentro de la estadística es frecuente que los datos a manejar sean bastante numerosos, por lo que se hace indispensable buscar maneras de interpretar esta gran cantidad de resultados. Una de esas maneras es la representación en gráficas o diagramas. Existen diversas representaciones gráficas y todas ellas contienen la información condensada del elemento de estudio.

Uno de los fines importantes de la estadística descriptiva es el de resumir esa gran cantidad de datos en unos pocos números que nos proporcionen una idea, lo más cercana posible, del comportamiento de todos los elementos de la población estudiada. Los mencionados elementos reciben el nombre de *parámetros.*

Los parámetros los dividimos en dos clases, que son:
Parámetros centrales.
Parámetros de dispersión.

Los parámetros centrales tienen como objetivo agrupar los datos de toda la población, alrededor de un solo número que será su representante. Los parámetros centrales son de gran utilidad para el manejo de datos estadísticos y los más importantes son:
- Media aritmética.
- Mediana.
- Moda.

Los parámetros de dispersión más frecuentes son:
- Rango.
- Desviación media.
- Desviación típica.

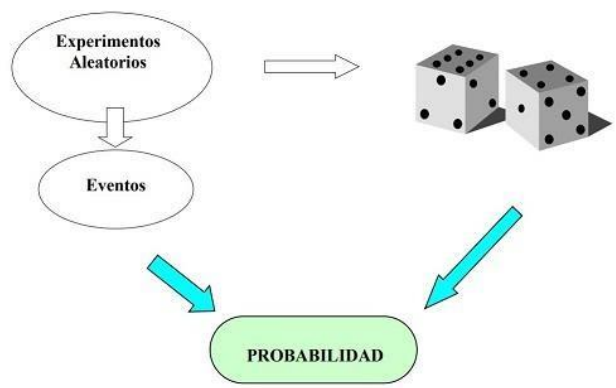
El conocimiento y manejo correcto de la estadística complementado con la probabilidad permitirá obtener una decisión razonada en la solución de un problema.

## CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE PROBABILIDAD

La probabilidad es el estudio de los fenómenos puramente aleatorios. La probabilidad apareció con base en los juegos de azar; cuando se utilizó la palabra probabilidad fue para indicar la posibilidad de que ocurra un evento o resultado.

El mundo en que vivimos está lleno de incertidumbre; las situaciones que implican incertidumbre varían de simples juegos de azar, como los dados y naipes, hasta problemas en campos tan variados e importantes como son las ciencias físicas, las sociales, la industria y los seguros, por mencionar algunos. Los problemas representativos de estos campos implican predicciones de lo que sucederá a futuro; es decir, qué probabilidad de ocurrencia existe para asegurar las predicciones.

Los primeros estudios sobre probabilidad fueron motivados por la posibilidad de acierto o de fracaso en los juegos de azar; es decir, qué ocurrencia tiene un suceso entre varios posibles.




Entendemos por probabilidad a la oportunidad de ocurrencia de un suceso A dentro de un conjunto de N posibles resultados, es decir:

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ posibles\ del\ evento\ A}{número\ de\ casos\ posibles} = \frac{A}{N}$$

La probabilidad se acostumbra a medir en porcentajes, aunque también se puede presentar en forma decimal o en forma racional.

Para el cálculo de probabilidades debemos recordar los conjuntos y sus operaciones.
Un conjunto es una colección de objetos bien definidos; cada objeto del conjunto será un elemento del mismo. Los conjuntos suelen representarse con letras mayúsculas.
El conjunto de todos los elementos se denomina conjunto universal mientras que el conjunto que carece de elementos recibe el nombre de conjunto vacío.

La *unión* de los conjuntos A y B es un nuevo conjunto representado A ∪ B y tal que:

$$A \cup B = \{x |\ x \in A\ y/o\ x \in B\}$$

En la unión de dos conjuntos podremos encontrar los elementos que pertenecen a cada conjunto y los que pertenecen a ambos.

La *intersección* de los conjuntos A y B es un nuevo conjunto representado A ∩ B y tal que:

$$A \cap B = \{x |\ x \in A\ y\ x \in B\}$$

En la intersección de dos conjuntos podremos encontrar solo los elementos que pertenecen a ambos conjuntos.

Ejemplos.

1) A partir de los siguientes conjuntos encuentra la operación indicada.

A = (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k)
B = (a, e, i, o, u)
C = (f, g, h, i, m, n, p)

Entonces
$A \cup B$ = (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, o, u)
$A \cap B$ = (a, e, i)
$C \cup B$ = (a, e, i, o, u, f, g, h, m, n, p)
$C \cap A$ = (f, g, h, i)
$B \cap C$ = (i)

2) Sí el conjunto A contiene a los números primos menores que 10; el conjunto B contiene a los números impares positivos menores que 10 y el conjunto C representa a todos los divisores positivos de 10. ¿Qué elementos habrá en $A \cap B \cap C$ ? ¿Y en $A \cup B \cup C$ ?

Tenemos que: A = (2, 3, 5, 7), B = (1, 3, 5, 7, 9) y C = (1, 2, 5, 10)
Entonces $A \cap B \cap C = (5)$ mientras que $A \cup B \cup C = (1, 2, 3, 5, 7, 9, 10)$

3) Sean el conjunto A = (x/x es un divisor de 24) y el conjunto B = (x/x es un múltiplo de 3). ¿Qué elementos tiene $A \cap B$? ¿Qué elementos tiene $A \cup B$?

Tenemos que: A = (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24) y B = (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24…)
Entonces $A \cap B = (3, 6, 12, 24)$ mientras que $A \cup B = (1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 18, 21, 24 \ldots)$

| Junta general | Madre | Padre | Total |
|---|---|---|---|
| Matutino | 15 | 12 | 27 |
| Vespertino | 10 | 8 | 17 |
| Total | 25 | 20 | 45 |

4) La tabla anterior muestra los asistentes a junta general de la escuela para elegir un representante de los padres de familia, ¿cuál es la probabilidad de elegir una madre del turno matutino?

El total de asistentes es 44 y madres del turno matutino son 15.
La probabilidad será $p(x) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

5) Se lanzan dos dados regulares simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sumen un valor menor a 5?

La probabilidad de un número sumar menos de 5 es sumar 2, 3 ó 4.
Para sumar 2 existe una combinación (1,1)
Para sumar 3 existen dos combinaciones (1,2) y (2,1)
Para sumar 4 existen tres combinaciones (1,3), (2,2) y (3,1)
Sumando esas combinaciones tenemos 6 posibilidades de sumar menos de 5.
El total de combinaciones, al lanzar dos dados, es (6)(6) = 36
La probabilidad será $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

## ENFOQUES DE LA PROBABILIDAD.

Existen 3 enfoques del estudio de la probabilidad:
1. El Enfoque Clásico. (Probabilidad a priori, antes de que el experimento se realice).
2. El Enfoque de Frecuencia Relativa. (Probabilidad a posteriori, después de que el experimento se realizó).
3. El Enfoque Axiomático. Establece un conjunto de reglas o axiomas que establecen puntos de partida para la probabilidad matemática.

### Enfoque clásico.

Las teorías de probabilidad surgieron gracias a los juegos de azar donde los resultados pueden ser aleatorios. A esta probabilidad se le llamó ***Probabilidad Clásica.***

La Probabilidad clásica, o a priori, de un evento o suceso A viene determinada por:

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ posibles\ del\ evento\ A}{número\ de\ casos\ posibles} = \frac{A}{N}$$

Ejemplos.

1.- La probabilidad a priori de que al lanzar un dado obtengamos un 5 es:

$$P(5) = \frac{1}{6}$$

2.- La probabilidad a priori de que al lanzar los dos dados obtengamos como suma un 12 es:

$$P(12) = \frac{1}{36}$$

3.- La probabilidad a priori de que al lanzar una moneda obtengamos cara es:

$$P(cara) = \frac{1}{2}$$

4.- La probabilidad a priori de que el cumpleaños de una persona que acabamos de conocer sea en diciembre (suponiendo meses con el mismo número de días) es:

$$P(diciembre) = \frac{1}{12}$$

## Enfoque de frecuencia relativa o a posteriori.

La teoría de probabilidad clásica presenta algunos inconvenientes por lo que se buscó la manera de encontrar una forma más general de probabilidad.

En el método de frecuencia relativa se utilizan datos pasados obtenidos en observaciones empíricas. Se tiene en cuenta la frecuencia con que ha ocurrido un suceso en el pasado y se estima la posibilidad de que vuelva a ocurrir a partir de estos datos históricos. La probabilidad a posteriori de un evento A viene determinada por:

$$P(A) = \frac{número\ de\ veces\ que\ ha\ sucedido\ el\ evento\ A}{número\ total\ de\ observaciones}$$

### Ejemplos.

1. Durante el mes de septiembre hubo 140 nacimientos en pabellón de maternidad del hospital de la ciudad. 80 de los recién nacidos fueron niñas. El enfoque de frecuencia relativa revela que la probabilidad de que el recién nacido siguiente sea una niña es:

$$P(niña) = \frac{80}{140} = \frac{8}{14} = 0.57$$

La probabilidad de que el recién nacido siguiente sea niña es del 57 %

2. De los últimos 20 partidos de futbol de cierto equipo Z, solo en 4 no ha logrado anotar ningún gol. ¿Cuál es la probabilidad de que en el próximo partido el equipo Z anote al menos un gol?

Si en los últimos 20 partidos no se logró anotar en 4 de ellos, significa que en los 16 restantes si se anotó al menos un gol. Entonces la probabilidad de anotar es:

$$P(anotar) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0.80$$

La probabilidad de que se anote en el siguiente partido es del 80 %

## Enfoque matemático o axiomático.

Por otro lado, existe el enfoque matemático que se apoya en los siguientes axiomas elaboran los axiomas que rigen a la probabilidad clásica:

**AXIOMA 1:** Si **A** es un evento entonces la probabilidad del evento **A** es:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

**AXIOMA 2:** Si **S** es un evento seguro entonces la probabilidad del evento **S** es:

$$P(\boldsymbol{S}) = 1$$

**AXIOMA 3:** Si $A_1$, $A_2$, $A_3$ ... $A_n$ son eventos mutuamente excluyentes y complementan el espacio muestral "**E**" podemos decir que la suma de las probabilidades de todos los eventos mutuamente es igual a 1:

$$P(\boldsymbol{E}) = P(A_1) + P(A_2) + P(3) + P(A_4) \ldots P(A_n) = 1$$

El primer axioma indica que la probabilidad de cualquier evento posible es mayor o igual a cero y menor e igual a uno.

El segundo axioma indica que la probabilidad del evento posible es igual a uno. Como complemento a este axioma tenemos que la probabilidad del evento imposible es cero.

El tercer axioma indica que, mientras los *eventos* sean ***mutuamente excluyentes o disjuntos***, lo que significa que no pueden ocurrir al mismo tiempo, la probabilidad de la unión de los eventos es igual a la suma de las probabilidades individuales de cada uno de ellos y, si complementan el espacio muestral, deberá ser 1.

# TÉCNICAS DE CONTEO

Las técnicas de conteo son estrategias matemáticas usadas en probabilidad y estadística que permiten determinar el número total de resultados que pueden haber a partir de hacer combinaciones dentro de un conjunto o conjuntos de objetos. Este tipo de técnicas se utilizan cuando es prácticamente imposible o demasiado difícil hacer de forma manual combinaciones de diferentes elementos y saber cuántas de ellas son posibles.

Las principales técnicas de conteo son cinco aunque no son las únicas, cada una con unas particularidades propias y utilizadas en función de los requisitos para saber cuántas combinaciones de conjuntos de objetos son posibles.

## *1. Principio multiplicativo*

Si un evento, llamémoslo A, puede ocurrir de varias formas, y otro evento B, puede ocurrir de otras tantas, entonces, los eventos conjuntamente pueden ocurrir de A x B formas.
Este principio se utiliza cuando la acción es secuencial, es decir, está conformada por eventos que ocurren de forma ordenada como elegir la ropa a usar en cierto día o el orden que se seguirá para tomar asiento en un aula.

Por ejemplo:

En un restaurante, el menú consiste en un plato principal, un segundo platillo y el postre. De plato principal, A tenemos 4 opciones; de segundo platillo, B hay 5 y de postre, C hay 3.
Entonces, A = 4; B = 5 y C = 3.
Así pues, las combinaciones que ofrece este menú serían 4 x 5 x 3 = 60

## *2. Principio aditivo*

En este caso, en vez de multiplicarse las alternativas para cada evento, lo que sucede es que se suman las varias formas en las que pueden ocurrir.
Esto quiere decir que si la primera actividad puede ocurrir de M formas, la segunda de N y la tercera L, entonces, de acuerdo a este principio, sería M + N + L.

Por ejemplo:

Queremos comprar chocolate, habiendo dos marcas en el supermercado: A y B
El chocolate A se vende de tres sabores: negro, con leche y blanco, además de haber la opción sin o con azúcar para cada uno de ellos.

El chocolate B se vende de tres sabores, negro, con leche o blanco, con la opción de tener o no avellanas y con o sin azúcar.
En base a esto, la pregunta que se pretende responder es: ¿cuantas variedades distintas de chocolate se pueden comprar?

Sean
W = número de formas de seleccionar el chocolate A.
Y = número de formas de seleccionar el chocolate B.

El siguiente paso consiste en una simple multiplicación.
W = 3 x 2 = 6.
Y = 3 x 2 x 2 = 12.
W + Y = 6 + 12 = 18 variedades de chocolate diferentes.

Para saber si se debe utilizar el principio multiplicativo o el aditivo, la pista principal es si la actividad en cuestión tiene una serie de pasos a realizarse, como era el caso del menú, o existen varias opciones, como es el caso del chocolate.

### *3. Permutaciones*

Antes de entender cómo hacer las permutaciones, es importante entender la diferencia entre una combinación y una permutación.
Una combinación es un arreglo de elementos cuyo orden no es importante o no cambia el resultado final.
En cambio, en una permutación, habría un arreglo de varios elementos en los que sí es importante tenerse en cuenta su orden o posición.
En las permutaciones, hay n cantidad de elementos distintos y se selecciona una cantidad de ellos, que sería r.

La fórmula que se utilizará es la siguiente: $nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$

Por ejemplo:

Hay un grupo de 10 personas y hay un asiento en el que solo pueden caber cuatro, ¿de cuántas formas se pueden sentar?

Se haría lo siguiente:

$$10P4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 =\cdot 5040$$

***4. Permutaciones con repetición***

Cuando se quiere saber el número de permutaciones en un conjunto de objetos, algunos de los cuales son iguales, se procede a realizar lo siguiente:
Teniéndose en cuenta que n son los elementos disponibles, algunos de ellos repetidos.
Se seleccionan todos los elementos n.

Se aplica la siguiente fórmula: $\frac{n!}{n1!\cdot n2!\cdots nk!}$

Por ejemplo:

En un barco se pueden izar 3 banderas rojas, 2 amarillas y 5 verdes. ¿Cuántas señales diferentes se podrían hacer izando las 10 banderas que se tienen?

Aplicando la fórmula obtenemos $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 5!} = 2520$ combinaciones de banderas diferentes.

***5. Combinaciones***

En las combinaciones, a diferencia de lo que sucedía con las permutaciones, el orden de los elementos no es importante.

La fórmula a aplicar es la siguiente: $nCr = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

Por ejemplo:

Un grupo de 10 personas quieren hacer limpieza en el barrio y se preparan para formar grupos de 2 miembros cada uno, ¿cuántos grupos son posibles?

En este caso, n = 10 y r = 2, así pues, aplicando la fórmula:

$$10C2 = \frac{10!}{2!\ (10-2)!} = \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{2!\,8!}$$

$$10C2 = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 45$$

Consideremos más ejemplos sobre permutaciones y combinaciones.

1. En el convivio navideño habrá tres diferentes puestos de comida: tacos, chalupas y tostadas. La elección de alumnos encargados se elegirá al azar. Si tenemos solo 5 posibles alumnos, dado que los demás ya están en otras áreas, ¿cuál es la probabilidad de que los encargados sean José en tacos, Sandra en chalupas y Luis en tostadas?

En una segunda opción se pretende que los alumnos elegidos en el sorteo acuerden entre ellos la comida que llevarán, ¿cuál es la probabilidad de que sean los mismos tres alumnos?

En el primer caso debemos considerar que importa el orden de elección por lo que tomamos las permutaciones. Debemos buscar el total de permutaciones de 5 alumnos tomados de 3 en 3 y buscar la probabilidad de conjunto elegido, es decir:

$$P(J,S,L) = \frac{1}{5P3}$$

Pero

$$5P3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Así

$$P(J,S,L) = \frac{1}{60} = 0.016$$

Elegir a los alumnos mencionados tiene una probabilidad de 1.6 %

En el segundo caso debemos considerar que no importa el orden de elección ya que solo se busca que sean solo esos tres alumnos; así que buscamos las combinaciones. Debemos buscar el total de combinaciones de 5 alumnos tomados de 3 en 3 y buscar la probabilidad de conjunto elegido:

$$P(J,S,L) = \frac{1}{5C3}$$

Pero

$$5C3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Así

$$P(J,S,L) = \frac{1}{10} = 0.1$$

La probabilidad aumentó de manera considerable ya que ahora es del 10 %

2. El comité estudiantil del grupo está formado por presidente y secretario. Para elegir al comité se propone a 6 alumnos que deben ser elegidos al azar en el orden mencionado. Si se desea que en el comité quede Ana como presidente y Jorge como secretario, ¿cuál es la probabilidad de elegir a tal pareja?

Una segunda opción pretende que los alumnos elegidos en el sorteo sea Ana y Jorge sin importar el puesto, ¿cuál es la probabilidad de ser elegidos?

En el primer caso es importante el orden de elección por lo que tomamos las permutaciones. Debemos buscar el total de permutaciones de 6 alumnos tomados de 2 en 2 y buscar la probabilidad de conjunto elegido, es decir:

$$P(A,J) = \frac{1}{6P2}$$

Pero

$$6P2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$$

Así

$$P(A,J) = \frac{1}{30} = 0.033$$

Elegir aleatoriamente a Ana como presidente y a Jorge como secretario tiene una probabilidad de 3.3 %

En el segundo caso debemos considerar que no importa el orden de elección ya que solo se busca que el comité estudiantil este formado por esos alumnos; así que buscamos las combinaciones. Debemos buscar el total de combinaciones de 6 alumnos tomados de 2 en 2 y buscar la probabilidad de conjunto elegido, es decir:

$$P(A,J) = \frac{1}{6C2}$$

Pero

$$6C2 = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

Así

$$P(A,J) = \frac{1}{15} = 0.06$$

Si se elige al azar el comité quedando con Ana y Jorge como representantes tiene una probabilidad de 6 %

## Aplicación a la toma de decisiones.

Existen diversas disciplinas donde la probabilidad y la estadística son necesarias para conseguir conclusiones certeras y tomar decisiones acertadas. La probabilidad es una rama de las matemáticas, que utilizamos habitualmente cuando se quiere explicar algún acontecimiento relevante; por ejemplo, el incremento de ventas en un supermercado, incremento en los mercados financieros, juegos de dados, avances de una epidemia, crecimiento de una población, crecimiento de las empresas o instituciones.

La teoría de la probabilidad pretende ser una herramienta para modelizar y tratar con situaciones de este tipo. Por otra parte, cuando aplicamos las técnicas estadísticas a la recolección, análisis e interpretación de los datos, la teoría de la probabilidad proporciona una base para evaluar la fiabilidad de las conclusiones alcanzadas y las inferencias realizadas

El análisis proporciona un soporte cuantitativo a los encargados de las decisiones porque están basados en aplicaciones estadísticas para la estimación de eventos incontrolables.
Por tal razón, los problemas de una mala interpretación pueden ser evitados si se proporciona un análisis entendible de los modelos, reduciendo las dificultades del proceso de validación y verificación del mismo; además las acciones están basadas en los resultados esperados que se mueve desde un modelo probabilístico. En la construcción de modelos se estudia el problema, luego se desarrolla el modelo matemático, que en la toma de decisiones se combina con la información sobre sus probabilidades.

Una buena decisión requiere buscar un conjunto de alternativas a las que se presentan inicialmente, porque no sabemos realmente donde está el problema que nos limita a lograr el éxito. Esta es la razón del porqué la estadística requiere estudio de las leyes de la probabilidad. Resulta claro que las buenas decisiones se amplían con la buena información o sabiduría; así mismo, la aplicación de la estadística se creó por la necesidad de poner conocimiento en una base sistemática de la evidencias, incluso se convierte en conocimiento, cuando son utilizados en el adicionamiento exitoso de un proceso de decisión.

## PROBABILIDAD E INDEPENDENCIA DE EVENTOS

Dentro de la probabilidad existe una gran cantidad de eventos y es importante distinguir la relación existente entre ellos. Un primer concepto a analizar es la de los eventos mutuamente excluyentes; estos son aquellos que no pueden ocurrir en forma simultánea como obtener un número par y un número impar al lanzar un dado, elegir un alumno mayor de edad y al mismo tiempo menor de edad en un grupo, etc. Los eventos mutuamente excluyentes son como los conjuntos cuya intersección es vacía.

Cuando ocurren múltiples eventos debemos analizar, también, la independencia o no, de los mismos para poder calcular su probabilidad. Llamamos **Eventos Independientes** a aquellos en los cuales el resultado de un evento no afecta el resultado del otro. Por ejemplo, si lanzamos un dado y luego lo lanzamos otra vez, el resultado del segundo lanzamiento es independiente del resultado del primer evento. La probabilidad de estos eventos combinados la podemos calcular a partir del producto de sus probabilidades individuales, es decir, para determinar la probabilidad de dos eventos independientes A y B simplemente multiplicamos las probabilidades de cada uno de los dos eventos:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

En algunos casos, el resultado de un evento afecta el resultado de un segundo evento. Por ejemplo, cuando se reparte una mano de cartas en un juego de póker, la probabilidad de recibir una carta en particular cambia basada en las cartas que ya han sido repartidas. Este es un ejemplo de la **Probabilidad condicional**.

La probabilidad condicional de que ocurra B, dado que A ya ocurrió es la siguiente:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \; con \; P(A) \neq 0$$

Otra manera de utilizar esta fórmula es despejar la intersección de los eventos A y B.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

### Ejemplos.

1. Se tienen 4 esferas negras, 6 rojas y 10 azules en una caja. ¿Cuál es la probabilidad de obtener las dos negras en dos extracciones sin reemplazo?

Sea $P(A)$ = negra en primera extracción, por lo tanto, $P(B|A)$ será la probabilidad de negra en la segunda, dado que fue negra en la primera.

Sabemos que P(A) = $\frac{4}{20}$ y $P(B|A) = \frac{3}{19}$

Por lo tanto $P(A \cap B) = P(A) \times \ P(B|A)$

$$P(A \cap B) = \ \frac{4}{20} \times \ \frac{3}{19} = \frac{12}{380}$$

2. Con una moneda y un dado, encuentra las siguientes probabilidades.

I) Obtener un 5 en el dado y cara en la moneda.
II) Obtener un número impar en el dado y obtener cara en la moneda.

Ya que el resultado de lanzar el dado no afecta el resultado de tirar la moneda, estos son eventos independientes. Es por esto que podemos determinar sus probabilidades individuales y multiplicarlas.

I) Sea A el evento 5 al lanzar un dado y B el evento cara al lanzar una moneda. Entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \times \ P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

II) Sea A el evento impar al lanzar un dado (tenemos 3 números impares) y B el evento cara al lanzar una moneda. Entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \times \ P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{12}$$

3. ¿Cuál es la probabilidad de que saques un as de un mazo de cartas cuatro veces si las cartas no se reemplazan antes de sacar la siguiente?

Para resolver este ejercicio debemos recordar que un mazo de cartas tiene 52 de ellas y que existen 4 ases. Observamos que los estos eventos son dependientes ya que las probabilidades se modifican en cada extracción.

Sea A el evento as en la primera extracción, B el evento as en la segunda extracción, C el evento as en la tercera extracción y D el evento as en la cuarta extracción. Entonces:

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \times \ P(B|A) \times P(C|A \cap B) \times P(D|A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} \times \frac{1}{49} = \frac{24}{6497400} = \frac{1}{270725}$$

## RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

La investigación estadística incluye la **recolección, análisis e interpretación, presentación y organización de datos**. Es utilizada para poder hacer comparaciones y encontrar correlaciones significativas entre grupos de datos. Un estudio estadístico consta de las siguientes fases:

- Toma o levantamiento de datos.
- Organización y representación de datos.
- Análisis de datos.
- Obtención de conclusiones.

Veamos algunos conceptos centrales de la estadística:

**Población**: Una población es el conjunto de todos los elementos a los que se somete a un estudio estadístico, es decir son el sujeto de los experimentos.

**Muestra**: Una muestra es un conjunto representativo de la población de referencia, el número de individuos de una muestra es menor que el de la población.

**Variable**: Una variable es cualquier característica, número o cantidad que se puede medir o contar dentro de una muestra. Existen dos tipos de variables, las variables cualitativas o categóricas y las variables cuantitativas numéricas.

1.- **Variables cualitativas**: Estas variables no tienen un orden específico y evalúan cualidades, por lo tanto, no se les puede asignar un número. Por ejemplo: el color de un automóvil.

2.- **Variables cuantitativas**: A éstas se les puede asignar un valor numérico y son medibles, por ejemplo: el número de abejas en un panal.

Para la organización de datos es frecuente utilizar tablas estadísticas en las que podemos concentrar toda la información, apoyarnos para construir gráficas y obtener diversas características o propiedades del total de dicha información como pueden ser las medidas descriptivas.

Organizar los resultados a partir de una tabla estadística es verdaderamente útil; en ella aparecen los valores observados en forma creciente, respecto a su magnitud, con su respectiva *frecuencia, frecuencia relativa, porcentaje y frecuencia acumulada.* Es frecuente agregar otros aspectos como *grados o porcentaje acumulado*, además el orden puede ser diferente.

Entendemos por *frecuencia*, al número de veces que aparece un determinado valor en todas las observaciones.

Entendemos por *frecuencia relativa*, al cociente entre su frecuencia y el total de observaciones realizadas. De allí obtenemos el porcentaje tan solo al multiplicar por 100.

La *frecuencia acumulada*, no siempre se presenta, pero cuando aparece la calculamos, para cierto valor h, sumando las frecuencias de los valores observados menores o iguales a h.

El porcentaje lo encontramos multiplicando la frecuencia relativa por 100 o recorriendo dos lugares a la derecha el punto decimal. Para encontrar los grados multiplicamos el porcentaje por 3.6

Esta forma de presentar los datos acompañados de sus frecuencias constituye un primer modo de agrupar los resultados de una encuesta o recolección de datos. A partir de la tabla, pueden hacerse diversas representaciones gráficas y calcular los parámetros estadísticos que caracterizan a la población estudiada.

Cuando los datos son numerosos, por lo general se organizan agrupándolos en clases que abarcarán cierta cantidad de valores.

Ejemplo:

Cómo varía el peso de un grupo de estudiantes de primer semestre de una preparatoria. Selecciona una muestra de 50 estudiantes y registra sus pesos en kilogramos. Los datos obtenidos fueron los siguientes:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 63 | 65 | 63 | 69 | 67 | 53 | 58 | 60 | 61 |
| 64 | 65 | 64 | 72 | 68 | 66 | 55 | 57 | 60 | 62 |
| 64 | 65 | 64 | 71 | 68 | 66 | 56 | 59 | 61 | 62 |
| 63 | 65 | 63 | 70 | 67 | 66 | 57 | 59 | 61 | 62 |
| 64 | 64 | 63 | 69 | 67 | 66 | 58 | 60 | 61 | 62 |

Este diagrama facilita determinar la cantidad de veces que se repite un dato y los valores de los datos con el fin de escribirlos de manera ordenada en la tabla. Para construir la tabla de datos no agrupados se debe calcular primero lo siguiente:

**Numero de clases** (k):

$$\mathbf{K} = 1 + 3{,}322 \log (n)$$
$$= 1 + 3{,}322 \log (50)$$
$$= 6{,}64 \approx 7$$

**Rango** (R):

$$\mathbf{R} = xn - x1 = 72 - 53 = \mathbf{19}$$

**Amplitud de clase** (I):

$$\mathbf{I} = R/k = 19/7 = 2{,}71 = \mathbf{3}$$

**Punto medio**: es el valor central de la clase. Se obtiene calculando el promedio de los límites reales, sumando al límite real inferior el límite real superior y dividiendo por dos.

**Frecuencia absoluta**: es el número de elementos u observaciones pertenecientes a una misma clase.

**Frecuencia relativa**: Se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el número total de observaciones. Indica la importancia relativa de la clase.

**Frecuencias acumuladas**: Es la suma de las frecuencias absolutas o relativas en sentido ascendente o descendente según se quieran acumular "hacia arriba" o "hacia abajo"

Al construir la tabla de datos agrupados con la información del ejemplo, se tiene la **distribución de frecuencias:**

| | Punto medio | Frecuencia absoluta | Frecuencia absoluta acumulada | Frecuencia relativa | Frecuencia relativa acumulada |
|---|---|---|---|---|---|
| ***Pesos (Kg)*** | $m_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $fr_i$ | $Fr_i$ |
| 53 - 55 | 54 | 2 | 2 | 4,00% | 4,00% |
| 56 - 58 | 57 | 5 | 7 | 10,00% | 14,00% |
| 59 - 61 | 60 | 9 | 16 | 18,00% | 32,00% |
| 62 - 64 | 63 | 15 | 31 | 30,00% | 62,00% |
| 65 - 67 | 66 | 12 | 43 | 24,00% | 86,00% |
| 68 - 70 | 69 | 5 | 48 | 10,00% | 96,00% |
| 71 - 73 | 72 | 2 | 50 | 4,00% | 100,00% |
| | | 50 | | 100,00% | |

## Frecuencia e información gráfica.

Los gráficos y las tablas representan e interpreta la información procedente de diferentes fuentes, de forma clara, precisa y ordenada. Según las características y la cantidad de datos, conviene utilizar uno u otro gráfico. A continuación, veremos los diferentes gráficos y cuando se emplean.
Los más conocidos son:

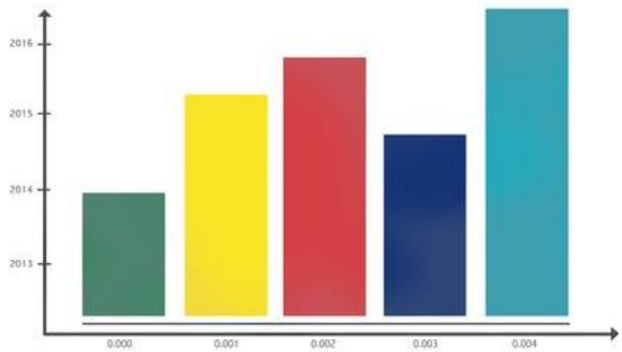



**Gráfico de barras**: Son aquellos que emplean barras rectangulares que se colocan paralelamente. La altura de cada barra indica la frecuencia de este dato. Con la información representada en los gráficos puedes interpretar rápidamente y de manera visual la información, facilitando su posterior análisis.

**Gráficos de líneas o lineal**: Es un conjunto de puntos conectados por una línea, que muestran tendencias de una variable a lo largo de un período.

**Gráfico circular o por sectores**: Es un diagrama en círculo que representa visualmente información en tajadas imaginarias.

**Pictogramas:** Son los más llamativos, ya que representan por medio de dibujos, se reemplazan las barras por representaciones gráficas. Éstas son comunes en revistas y periódicos.

**Histograma:** Es un gráfico formado por barras contiguas, donde cada una representa un intervalo de valores, sirve para expresar información sobre datos que están agrupados.

**Tablas:** Son las que organizan los datos para mostrar qué tan seguido ocurre algo, permite organizar la información numérica recogida, por ejemplo, a través de una encuesta.

## Frecuencia.

Tanto en las tablas como los gráficos **el número de veces que se repite un dato se denomina frecuencia.** Las tablas de frecuencia son de suma importancia ya que a partir de éstas se pueden crear gráficas e interpretar las medidas de descripción. En la tabla se organizan todos los datos junto a las frecuencias que les corresponde. Ejemplo:

Los niños de un curso elaboraron una encuesta para saber cuál era su animal preferido, los resultados que obtuvieron fueron los siguientes:

- 12 alumnos dijeron: oso.
- 16 alumnos dijeron: perro.
- 10 alumnos dijeron: zorros.
- 6 alumnos dijeron: vacas.

**Paso 1**. Esta encuesta la graficamos en una tabla de frecuencia, para ello realizaremos una tabla con cuatro casillas, con los cuatro animales favoritos de los alumnos.

**Paso 2**. Ahora debemos agregar un título a la columna con el listado de animales al que llamaremos "Animales" y la columna de la derecha donde aparecen los datos con la cantidad de alumnos a quién le hicimos la encuesta, la llamaremos "Número de niños", además colocaremos los resultados:

- Con estos datos podemos observar de manera clara que el animal que más prefieren los alumnos es el oso.
- Con los datos de la tabla podemos realizar un gráfico.

| Animales | Número de niños |
|---|---|
| Oso | 12 |
| Perro | 16 |
| Zorros | 10 |
| Vaca | 6 |

Para realizar el gráfico, lo primero que debemos hacer es dibujar los ejes de coordenadas, uno vertical y el otro horizontal, cómo se ve a continuación: en el eje vertical, vamos a representar el número de alumnos y en el eje horizontal, vamos a representar los animales. Ahora sólo tenemos que marcar que en el gráfico los datos que hemos recogido en la tabla.

## MEDIDAS DESCRIPTIVAS

Es muy común que exista un conjunto de diferentes resultados para una observación dada, ya sea por las características de la muestra o población estudiada, o por diferencias en los métodos de medición.

Para tener **información más precisa y objetiva de las observaciones** que se estudian, se utilizan las medidas descriptivas, éstas son:

**Medidas de tendencia central**: Permiten el estudio de las observaciones localizadas en la parte más concurrida del conjunto de observaciones.

**Medidas de variabilidad**: Estudian el rango en el que se presentan las observaciones, buscando determinar la validez de cada resultado, así como determinar los valores que se entienden como aceptables.

**Medidas de posición relativa**: Estudian a las observaciones de acuerdo con su posición dentro del conjunto de observaciones.

## MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL.

En ocasiones, nos interesa **centrar** nuestra atención en medidas que nos den un resumen de los datos obtenidos. Nos preguntamos ¿qué características de tal conjunto de números son de más interés y merecen más atención? Una de las características que más nos interesa es donde se encuentra su centro.

### MEDIDA ARITMÉTICA.

La media aritmética o promedio de un conjunto de **n** mediciones es igual a la suma de las mediciones dividida entre **n**.

La media aritmética **x** de un conjunto de números $x_1$, $x_2$,..., $x_n$ está dada por la fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

El valor de la media es más preciso que la exactitud asociada con cualquier observación individual, por esto, habitualmente reportamos el valor de la media usando un dígito de mayor exactitud decimal a la empleada en las individuales.
Cuando estudiamos a una muestra o población, una de las comparaciones más comunes es visualizar si una observación se encuentra por encima o por debajo de la media.

Ejemplo: La cantidad de reflectancia de luz de las hojas se ha utilizado para varios fines, incluyendo la evaluación del color de la tierra, la estimación de la condición del Nitrógeno y medidas de biomasa. El artículo científico Leaf reflectance- Nitrogen- Chlorofyll relations in buffelgrass dio las siguientes observaciones, obtenidas mediante espectrofotometría en reflectancia de hojas bajo condiciones experimentales específicas:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15.2 | 16.8 | 12.6 | 13.2 | 12.8 | 13.8 | 16.3 | 13.0 |
| 12.7 | 15.8 | 19.2 | 12.7 | 15.6 | 13.5 | 12.9 | |

Hallar la media aritmética para las observaciones obtenidas.

**Solución**: La muestra está formada por n = 15 elementos. Para obtener la media muestral, deberán sumarse las 15 observaciones y dividirlas entre 15, de manera que:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{216.1}{15} = 14.4$$

**MEDIANA.**

La mediana de un conjunto de n mediciones es el valor de x que cae en la posición media cuando las mediciones son ordenadas de menor a mayor.
La mediana muestral se obtiene al ordenar primeramente las n observaciones de menor a mayor, incluyendo valores repetidos, de manera que cada observación muestral aparezca en la lista ordenada. Entonces:

$$\tilde{x} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \textit{ésimo término}, si\ n\ es\ impar.$$

$$\tilde{x} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right) \textit{ésimo término} + \left(\frac{n+1}{2}\right) \textit{ésimo término}}{2}, si\ n\ es\ par.$$

Ejemplo: El riesgo de desarrollar deficiencia de hierro es especialmente alto durante el embarazo. El problema para detectar esta diferencia es que algunos métodos para determinar el contenido de hierro pueden ser afectados por el mismo estado de embarazo. Considera los siguientes datos sobre la concentración de globulina receptora, para una muestra de mujeres con pruebas de laboratorio de evidente anemia por deficiencia de hierro (Serum Transferrin Receptor for the Detection of Iron Deficiency in Pregnancy, Amer J. of Clinical Nutrition 191, pp. 1077-1081):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 15.2 | 9.3 | 7.6 | 11.9 | 10.4 | 9.7 |
| 20.4 | 9.4 | 11.5 | 16.2 | 9.4 | 8.3 |

**Solución**: La lista de valores ordenados es:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7.6 | 8.3 | 9.3 | 9.4 | 9.4 | 9.7 |
| 10.4 | 11.5 | 11.9 | 15.2 | 16.2 | 20.4 |

Como n = 12 es par, promediamos el sexto y séptimo valores ordenados para obtener la media muestral:

$$\tilde{x} = \frac{9.7 + 10.4}{2}$$

$$\tilde{x} = 10.05$$

Observamos que si la observación mayor, 20.4, no hubiera aparecido en la muestra, la resultante de la mediana muestral para las n= 11 observaciones hubiera sido el único valor medio 9.7. La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{139.3}{12} = 11.61$$

Que es un poco mayor que la mediana x, debido a los valores inusuales 15.2, 16.2 y 20.4.

La mediana, a diferencia de la media, es una medida insensible a las observaciones. Sucede a menudo que un conjunto de observaciones hay medidas que son muy grandes o pequeñas.
Estas medidas afectan a la media, pues una medida muy alta puede recorrer la media a la derecha, o muy pequeña, mover la media a la izquierda. Esto no sucede con la media, al ser una medida insensible, se mantendrá en su lugar sin importar las medidas poco comunes.
En una situación ideal, la media y la mediana deben estar en el mismo lugar, cuándo existe un sesgo, es decir, la existencia de medidas poco comunes, la media se recorre hacia un lado.

## MODA.

La moda es la categoría que se representa con más frecuencia o el valor de x que se representa con más frecuencia. Cuando las mediciones en una variable continua se han agrupado como histograma de frecuencia, o de frecuencia relativa, la clase con el pico más alto o frecuencia se llama clase modal, y el punto medio de esta clase se toma como la moda.

La medida modal nos **indica el valor que más veces se repite dentro de los datos**; es decir, en la serie ordenada la moda es 2. Es posible que en algunas ocasiones se representen dos o más valores con mayor frecuencia, en estos casos, se dice que el conjunto es **multimodal**.

## MEDIDAS DE DISPERSIÓN O VARIABILIDAD.

*Los parámetros de dispersión* son aquellos que nos permiten tener una idea de la desviación de los datos respecto de los valores centrales.

Algunos de estos parámetros son:

- Rango.
- Desviación media.
- Varianza.
- Desviación típica.

**Rango.-** Se llama rango de un conjunto de datos a la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de todos los valores del conjunto.

El rango nos da una aproximación de la desviación de los datos. Si el rango es grande, existe la posibilidad de que los valores centrales no sean representativos. Si el rango es pequeño, los datos no pueden hallarse muy separados y los valores centrales si son representativos.

**Desviación media.-** La desviación media nos da una medida de la cercanía de los datos de una muestra respecto a la media.

Consideramos, primero, la siguiente definición:
Se llama desviación del valor $x_i$, respecto de su media $\bar{x}$, a la diferencia entre dicho valor y la media, es decir: $d_i = x_i - \bar{x}$
Esta medida nos da una idea de la proximidad de cada valor respecto a su media aritmética y la desviación puede tomar valores positivos, negativos o ser cero.

Cuando consideramos los valores absolutos de todas las desviaciones y obtenemos su media, entonces tendremos el valor de la desviación media.

Definimos, entonces, la desviación media de la siguiente forma:
Se llama desviación media (d. m) a la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones.

$$d.m. = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

**Varianza y desviación típica.- Los dos parámetros siguientes tienen su origen en tratar de evitar los valores negativos (varianza) y los números al cuadrado (desviación típica).**

**El cálculo de la varianza es un proceso muy parecido a la desviación media ya que estos valores, a diferencia de tomar su valor absoluto, se elevarán al cuadrado y así se evitan los números negativos. Para obtener el valor final de la varianza se realiza el cálculo de la media de dichos cuadrados.**

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

**La varianza presenta un inconveniente que consiste en que sus unidades no son las mismas con las que se miden inicialmente los datos ya que ahora se presentan al cuadrado. Esto puede acarrear confusiones por lo cual se introduce la desviación típica que no es otra cosa más que la raíz cuadrada de la varianza.**

**Es decir, primero se obtienen las desviaciones, inmediatamente después se calcula la varianza con la media de los cuadrados de las desviaciones y finalmente se calcula la desviación típica al buscar la raíz cuadrada. Es indiscutible la estrecha relación entre estos dos parámetros de dispersión.**

Ejemplos.

1)

| Día | Lunes | Martes | Miércoles | Jueves | Viernes | Sábado |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Minutos de retardo | 6 | 4 | 3 | 3 | 2 | 4 |

La tabla anterior muestra los minutos de retardo de Luis en su trabajo durante una semana laboral. Halle el valor de la media, la mediana, la moda y del rango de los minutos de retardo.

Para la media

$$\bar{x} = \frac{6+4+3+3+2+4}{6}$$

$$\bar{x} = \frac{22}{6} = 3.6$$

Para la moda basta observar el valor con mayor frecuencia: 3

La mediana es el valor central de los números ordenados. Como tenemos 6 números, la mediana será el que está en medio de las posiciones 3 y 4: 2, 3, 3, 4, 4, 6
La mediana es 3.5

El rango será la diferencia entre el valor más alto y el valor más pequeño: 6 – 2 = 4

2) La mediana de 8 números pares consecutivos es 25. ¿Cuál es el mayor de los 8 números?

La mediana es el valor central de los números ordenados. Como son 8 números, la mediana estará entre las posiciones 4 y 5. Sí la mediana es 25 entonces hay 4 valores pares antes y 4 valores pares después. Los números son: 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32
El mayor número es 32.

3) A un conjunto de 5 números cuya media es 88 se le añade un nuevo número ¿Cuál será el valor del nuevo número para que la media sea 90?

Sí la media de los 5 números es 88 significa que tenemos una suma total de (5)(88) = 440
Al agregar un sexto número queremos que la media sea de 90, es decir, (6)(90) = 540
La diferencia entre ambos productos será el valor del número añadido, es decir: 100

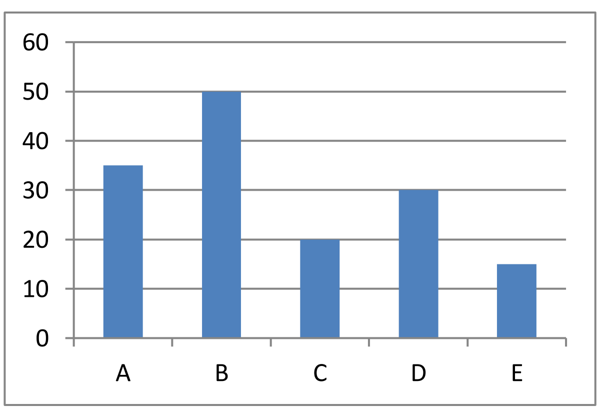
4) La siguiente tabla indica las calificaciones y el promedio de algunos alumnos.

| ALUMNOS | CALIFICACIONES | PROMEDIO |
|---|---|---|
| Julieta | 8,7,9,7,6 | 7.4 |
| Perla | 10,7,10,5,5 | 7.4 |
| David | 5,6,7,9,10 | 7.4 |

¿Quién tendrá la menor desviación media?

Podemos calcular la desviación media de cada alumno, pero observamos que todos tienen el mismo promedio de calificaciones, solo que el rango de Julieta es menor, por lo que ella tendrá menor desviación media.

5) La gráfica muestra el histograma de frecuencias de las ventas obtenidas de algunos productos en el día. ¿Qué fracción de ventas se tienen del producto D?

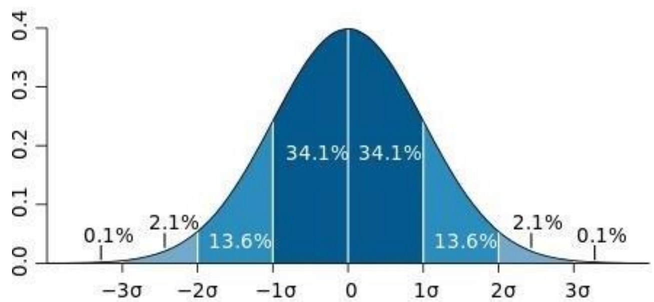



De acuerdo con el histograma, del producto D se vendieron 30 piezas y el total de ventas, sumando todos los productos, es de 150. La fracción buscada es $\frac{30}{150} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

La **desviación típica** (también conocida como **desviación estándar** y representada de manera abreviada por la letra griega minúscula sigma **σ** o la letra latina **s**, así como por las siglas **SD**) es una medida que se utiliza para cuantificar la variación o la dispersión de un conjunto de datos numéricos.

Una desviación estándar baja indica que la mayor parte de los datos de una muestra tienden a estar agrupados cerca de su media (también denominada el valor esperado), mientras que una desviación estándar alta indica que los datos se extienden sobre un rango de valores más amplio.

En la gráfica siguiente de la **distribución normal** (o curva en forma de campana, o curva de Gauss), donde cada banda tiene un ancho de una vez la desviación estándar.




Se dice que muchos fenómenos se distribuyen normalmente. Esto significa que si uno toma al azar un número suficientemente grande de casos y construye un polígono de frecuencias con alguna variable continua, por ejemplo peso, talla, presión arterial o temperatura, se obtendrá una curva de características particulares, llamada *distribución normal*. Es la base del análisis estadístico, ya que en ella se sustenta casi toda la inferencia estadística.
Esta función, también conocida como *distribución normal* tiene la forma de una campana, por este motivo también es conocida como la *campana de Gauss*. Sus características son las siguientes:

- Es una distribución simétrica.
- Es asintótica, sus extremos nunca tocan el eje horizontal y sus valores tienden a infinito.
- En el centro de la curva se encuentran la media, la mediana y la moda.
- El área total bajo la curva representa el 100% de los casos.
- Los elementos centrales del modelo son la media y la varianza.

La distribución normal sirve para conocer la probabilidad de encontrar un valor de la variable que sea igual o inferior a un cierto valor $x_i$, conociendo la media, la desviación estándar, y la varianza de un conjunto de datos en sustituyéndolos en la función que describe el modelo. Para el cálculo de probabilidades con la distribución normal debemos considerar el uso de la fórmula matemática aunque, debido a la complejidad de la misma, es común el uso de tablas de probabilidad estandarizadas o programas de cómputo estadístico.

# RAZONAMIENTO DEL LENGUAJE Y LA COMUNICACIÓN

## IDEAS EXPLÍCITAS E IMPLÍCITAS

La estructura de un texto es tripartita, presenta una **introducción**, un **desarrollo** y una **conclusión**. Ahora bien, cabe destacar que a través de la agrupación de palabras generamos oraciones, estas oraciones pueden construir párrafos y estos a su vez formar textos. Así pues, los párrafos tienen la posibilidad de presentar una **idea principal** y otras que se consideran **secundarias**. Los ejercicios de ideas explícitas e implícitas evalúan la capacidad para identificar la información expresada o sugerida en la lectura. Las **ideas explícitas** (principales o secundarias) hacen alusión a las ideas que el autor del texto comunica de manera clara y directa, a diferencia de las **ideas implícitas** en las que el autor no las expresa de forma directa, es decir, solamente las sugiere. En este tipo de reactivos es importante atender y entender la información fundamental de la lectura. Para su resolución es necesario ubicar la información por la que se pregunte en el reactivo e inmediatamente elegir la respuesta adecuada, es decir, aquella que esté presente en la lectura.

Idea principal:

- Expresa la información más relevante de un párrafo.
- No depende de otras oraciones para tener sentido.
- Regularmente es la primera oración del párrafo.

Ideas secundarias:

- Generalmente encontramos más de una idea secundaria por párrafo.
- Su importancia es menor respecto a la idea principal y amplía, ejemplifica, argumenta o demuestra la idea principal.
- Depende de la idea principal.

Inferencias:

- Ideas que no aparecen literalmente en el texto, simplemente sugeridas.
- Son conjeturas o hipótesis construidas con base en el contenido del texto.

En el examen debes reflejar tu capacidad para inferir información, respondiendo la siguiente clase de preguntas:

1. Del texto se deduce que...
2. Del pasaje anterior podemos inferir que...
3. De la lectura se puede inferir que…
4. El texto implica que...
5. Una deducción lógica del texto sería....
6. Con base en el texto, podemos decir que...
7. ¿Cuál sería una inferencia correcta del texto?

Ejemplo.

No hay nada tan patético como una multitud de espectadores inmóviles presenciando con indiferencia o entusiasmo el enfrentamiento desigual entre un noble toro y una cuadrilla de matones desequilibrados destrozando a un animal inocente que no entiende la razón de su dolor.

Del ejemplo anterior podemos inferir varias ideas. Con base en las palabras con tono de desaprobación que usa, podemos decir que el autor está en contra de las corridas de toros. También podríamos llegar a la conclusión de que el autor es un defensor de los animales. Entre otras cosas, la información también implica que el autor es una persona sensible ante el dolor y la vida de los seres vivos.

## Ejemplos de reactivos.

Esta sección contiene lecturas de diversos géneros. Los ejercicios que se plantean están basados en la información que contienen las lecturas. Lee cuidadosamente y selecciona la respuesta que responde MEJOR al planteamiento de la pregunta o que completa la afirmación de manera CORRECTA.

### *EL FUEGO*

*Algunas especies humanas pudieron haber hecho uso ocasional del fuego muy pronto, hace 800.000 años. Hace unos 300.000 años, Homo erectus, los neandertales y Homo sapiens usaban el fuego de manera cotidiana. Ahora los humanos tenían una fuente fiable de luz y calor, y un arma mortífera contra los leones que rondaban a la busca de presas. No mucho después, los humanos pudieron haber empezado deliberadamente a incendiar sus inmediaciones.*

*Un fuego cuidadosamente controlado podía convertir espesuras intransitables e improductivas en praderas prístinas con abundante caza. Además, una vez que el fuego se extinguía, los emprendedores de la Edad de Piedra podían caminar entre los restos humeantes y recolectar animales, nueces y tubérculos quemados. Pero lo mejor que hizo el fuego fue cocinar. Alimentos que los humanos no pueden digerir en su forma natural (como el trigo, el arroz y las patatas) se convirtieron en elementos esenciales de nuestra dieta gracias a la cocción. El fuego no solo cambió la química de los alimentos, cambió asimismo su biología. La cocción mataba gérmenes y parásitos que infestaban los alimentos. A los humanos también les resultaba más fácil masticar y digerir antiguos platos favoritos como frutas, nueces, insectos y carroña si estaban cocinados. Mientras que los chimpancés invierten cinco horas diarias en masticar alimentos crudos, una única hora basta para la gente que come alimentos cocinados.*
*El advenimiento de la cocción permitió que los humanos comieran más tipos de alimentos, que dedicaran menos tiempo a comer, y que se las ingeniaron con dientes más pequeños y un intestino más corto. Algunos expertos creen que hay una relación directa entre el advenimiento de la cocción, el acortamiento del tracto intestinal humano y el crecimiento del cerebro humano. Puesto que tanto un intestino largo como un cerebro grande son extraordinarios consumidores de energía, es difícil tener ambas cosas. Al acortar el intestino y reducir su consumo de energía, la cocción abrió accidentalmente el camino para el enorme cerebro de neandertales y sapiens.*

*El fuego abrió también la primera brecha importante entre el hombre y los demás animales. El poder de casi todos los animales depende de su cuerpo: la fuerza de sus músculos, el tamaño de sus dientes, la envergadura de sus alas. Aunque pueden domeñar vientos y corrientes, son incapaces de controlar estas fuerzas naturales, y siempre están limitados por su diseño físico. Las águilas, por ejemplo, identifican las columnas de corrientes térmicas que se elevan del suelo, extienden sus alas gigantescas y permiten que el aire caliente las eleve hacia arriba. Pero las águilas no pueden controlar la localización de las columnas, y su capacidad de carga máxima es estrictamente proporcional a su envergadura alar.*

*Cuando los humanos domesticaron el fuego, consiguieron el control de una fuerza obediente y potencialmente ilimitada. A diferencia de las águilas, los humanos podían elegir cuándo y dónde prender una llama, y fueron capaces de explotar el fuego para gran número de tareas. Y más importante todavía, el poder del fuego no estaba limitado por la forma, la estructura o la fuerza del cuerpo humano. Una única mujer con un pedernal o con una tea podía quemar todo un bosque en cuestión de horas.*

*HARARI, Yuval Noah, De animales a dioses. Una breve historia de la humanidad (Madrid, Editorial Debate, 2015).*

1. Es la idea principal del texto.

a) Gracias a que los seres humanos lograron dominar el fuego, pudieron consumir un mayor número de alimentos en menos tiempo.
b) La domesticación del fuego fue un hecho importante en la evolución del ser humano y de su diferenciación de otros animales.
c) La domesticación del fuego fue una señal de lo que habría de venir para los seres humanos en su evolución.
d) La consecuencia más importante del uso del fuego por parte de los seres humanos fue el cambio en sus costumbres.

En este caso, la opción correcta es el **inciso B**, ya que efectivamente, la lectura trata acerca de la importancia de la domesticación del fuego y su impacto en diferentes ámbitos de la vida de la especie humana. La opción A sólo destaca el hecho de la alimentación; del mismo modo los incisos C y D dan respuestas parciales o que toman en cuenta un solo aspecto de los mencionados en la lectura.

2. Selecciona la opción que sintetiza la idea del penúltimo párrafo.

a) El fuego como elemento que distinguió al hombre de los demás animales.
b) Las limitaciones en el poder de los animales debido a su diseño físico.
c) Las diferencias entre los animales, y los Homo sapiens y astralopithecus.
d) Las águilas como ejemplo de animales limitados por su físico.

La opción correcta **es A**, ya que al inicio del párrafo se menciona que el uso del fuego marcó una diferencia entre las especies. Mientras que la opción B es incorrecta debido a que menciona una idea secundaria, el físico de los animales. La opción C es incorrecta pues en el párrafo no se menciona nada referente a los astralopithecus y finalmente el inciso D, también destaca una idea secundaria.

3. Es la idea FALSA sobre el fuego.

a) El fuego se usó por primera vez hace unos 800 000 años.
b) El fuego permitió la cocción de los alimentos y ahorrar tiempo.
c) El uso del fuego por el humano fue un gran acontecimiento.
d) El fuego es tan impredecible que es mejor mantenerse lejos.

La opción correcta **es D**, pues la lectura trata acerca de la domesticación del fuego y este inciso habla de que no se puede domesticar. Las demás opciones se mencionan en la lectura.

4. Es un alimento que el humano no podía digerir en su forma natural.

A) zanahoria
B) espinaca
C) trigo
D) mango

La respuesta correcta **es C**; trigo, que se menciona junto con el arroz y las papas, mientras que el resto de los alimentos no se mencionan en la lectura.

5. ¿Cuál es el propósito del autor de la lectura anterior?

a) Destacar la inferioridad de los animales comparados con el ser humano.
b) Convencer al lector de la importancia de la cocción de los alimentos.
c) Describir los efectos que tuvo la domesticación del fuego en el humano.
d) Mostrar información científica de las capacidades físicas de diferentes especies.

El **inciso C** es la respuesta correcta pues la lectura trata fundamentalmente de las transformaciones en la vida del humano gracias al uso controlado del fuego.

## VOCABULARIO EN CONTEXTO

El contexto es aquella situación, modo o intención al utilizar una palabra dentro de una oración. En el contexto podemos encontrar pistas que nos ayudan a deducir el significado de palabras desconocidas. No importa si nunca hemos visto o escuchado cierta palabra, podemos **inferir** a qué se refiere o qué está significando en el contexto que es aplicada. Para ello es necesario analizar el resto de las palabras utilizadas en la misma oración o en las oraciones inmediatamente cercanas, antes o después. Recuerda que el contexto es el grupo de palabras que rodean a la palabra en cuestión.

Saber inferir lo que el autor quiere decir o la intención que tiene al utilizar ciertas palabras o expresiones habla de una buena lectura crítica y analítica. Así que aprende a observar y razonar acerca del vocabulario usado en el texto y el fin que persigue.
Algunos recursos que puedes utilizar para identificar el significado en contexto son **definiciones**, **ejemplos** o **sinónimos**.

Ejemplos:

**- Definiciones.**

1. De acuerdo con sus biógrafos y registros históricos, el soldado creció bajo una educación armígera. Esto es, inclinada a la guerra.

Identifica esta definición y tómala en cuenta para responder la siguiente pregunta.

La palabra “armígera”, línea 2, se acerca en significado a:
a) belicosa
b) pacifista
c) rígida
d) austera

Respuesta A
La definición que el texto contiene es una clara pista para entender que b, c y d no tienen relación con la palabra “armígera”.

**- Ejemplos.**

2. La energía puede presentarse en diferentes maneras. Por ejemplo, en el movimiento, la exposición, el calor o la electricidad.

Identifica los ejemplos que se encuentran después del concepto que se evalúa.

La palabra “presentarse”, línea 1, puede sustituirse por:
a) expresarse
b) exponerse
c) manifestarse
d) exhibirse

Respuesta C
Tomando en cuenta los ejemplos que el texto proporciona, se pueden combinar las opciones que se presentan. De esta manera, es posible determinar que la energía se manifiesta en el movimiento, la posición, el calor o la electricidad

**- Sinónimos.**

3. Las antiguas piezas de alfarería más elocuentes, expresivas o convincentes provienen del periodo Neolítico.

Identifica los sinónimos que se proporcionan en la misma oración y que ilustran mejor el significado del concepto que se evalúa.

La palabra “elocuentes”, línea 1, se asemeja en significado a:
a) sobrias
b) efusivas
c) significativas
d) auténticas

Respuesta C
A partir de los sinónimos que se proporcionan en el texto es posible determinar que “sobrias” es opuesta a la palabra que se evalúa; efusivas no se utilice para describir piezas de alfarería. Auténticas no se relaciona con los sinónimos que se presentan.

## CONECTORES TEXTUALES.

Los conectores textuales guían al lector y resaltan sentidos necesarios para la coherencia del mensaje. Ayudan a darle fluidez al discurso y a presentar las ideas de forma cohesionada.

Ejemplos de conectores textuales: incluso, también, además, por lo tanto, entonces, por eso, por ello, de igual manera, del mismo modo, al contrario, etc.

## MARCADORES TEXTUALES.

Los marcadores textuales pueden ser oraciones, palabras o locuciones. Sirven para estructurar el texto, guiar al lector, y favorecer la localización de la información.

Ejemplos de marcadores textuales: en resumen, en pocas palabras, en conjunto, globalmente, brevemente, hasta aquí, finalmente, entonces, en conclusión, para acabar.

## ESTRUCTURA DEL TEXTO

Un texto se constituye de párrafos, a su vez los párrafos se constituyen de oraciones (simples o compuestas). En un párrafo se desarrolla una idea. La información se debe presentar de manera coherente y debe contener elementos de cohesión (conectores, nexos, pronombres, referentes). Un párrafo se termina cuando escribimos un punto y aparte. En redacción uno de los ejercicios de la prueba es determinar donde inicia un nuevo párrafo. Por lo que es necesario determinar los nodos temáticos. Mendoza (2007) explica que la estructura del párrafo está dividida en estructura semántica, estructura formal y cualidad del párrafo. Esto se ilustra en el siguiente cuadro.

Estructura semántica ⟶ constituida por una idea central o temática e ideas complementarias que sirven para desarrollarla.

Estructura formal ⟶ integrada por un conjunto de oraciones unidas entre sí por los elementos cohesivos y los signos de puntuación.

Cualidad del párrafo ⟶ un párrafo debe desarrollar sólo una idea fundamental porque al introducirse otras ideas ajenas al tema, se rompe la unidad.

Ejemplo.

Las especias son fracciones de diferentes plantas cultivadas por sus propiedades aromáticas, pero siempre útiles para el empleo humano. Aunque consisten en rizomas, bulbos, cortezas, estigmas, frutos, semillas y hojas, por lo general se clasifican en las categorías de especias, semillas de especias y hierbas. Los primeros usos que tuvieron fueron medicinales. Los sacerdotes las usaban para la adoración y los rituales, y los chamanes las usaban como amuletos para mantener alejados a los malos espíritus del hogar. Diversas culturas prepararon herbarios o manuales sobre las plantas y su uso. No existe información confiable sobre el momento en que los seres humanos comenzaron a poner sustancias vegetales aromáticas a la comida a manera de condimento. Algunos de los primeros registros es la de los califas de Bagdad que servían platillos preparados con hierbas y especias con el objetivo de conseguir una rica gama de sabores dulces, salados, ácidos y amargos.

Idea central o temática: la definición y uso de las especias.

Idea complementaria: ideas que detallan y explican la idea central.

Estructura formal: uso de marcadores (aunque), sinónimos (herbarios o manuales) y el uso de signos de puntuación para separar ideas.

## TIPOS DE TEXTO

**Textos históricos:** Un texto histórico es cualquier documento escrito que permite obtener un conocimiento más completo, diversificado y significativo de la Historia, entendiéndose esta como los acontecimientos o hechos que, pertenecientes al pasado, constituyen el desarrollo de la humanidad desde sus orígenes hasta el momento presente. Como ejemplo de este tipo de lecturas están las que relatan el surgimiento, desarrollo y caída de civilizaciones: batallas, guerras, conquistas entre diversos pueblos o países; tratados, alianzas, atentados, etc. Una referencia sencilla para identificarlos puede ser "todo aquello que durante la vida escolar se estudia como historia: Mundial, de México, Contemporánea, de la Edad Media, etc." Se identifican principalmente por la mención de fechas y lugares. así como nombres de personajes, batallas, tratados, instituciones, etc.

Por ejemplo:

Aunque existe una cierta polémica en las interpretaciones, el año 962 se suele aceptar como el de la fundación del Sacro Imperio. En ese año, Otón I el Grande era coronado emperador, recuperando de manera efectiva una institución desaparecida desde el siglo V en la Europa Occidental Algunos remontan la recuperación de la institución imperial a Carlomagno y su coronación corno emperador de los romanos en 800. Sin embargo, los documentos que generó en vida su corte no dan un especial valor a dicho título y siguieron utilizando principalmente el de rey de los francos.

**Textos científicos**: Son escritos relacionados con alguna ciencia en su forma básica, es decir, que se lleva a cabo sin fines prácticos inmediatos, sino solo con el fin de incrementar el conocimiento de los principios fundamentales de la naturaleza o de la realidad por sí misma, tal como materias de secundaria o preparatoria. Las más comunes son física, sociología, química, antropología, matemáticas, biología, astronomía, etc.

Por ejemplo:

La gravedad se puede definir como la fuerza de atracción que un objeto astronómico, como la Tierra, ejerce sobre un cuerpo físico (por ejemplo, nosotros), hacia su centro. La fuerza con que un cuerpo físico es atraído está relacionada con su propia masa y también con la del objeto que lo atrae. Es por eso que una persona no pesa igual en la Tierra que en la Luna, aunque su cuerpo sea el mismo, la masa del planeta Tierra y la de su satélite es muy diferente. Por tanto, una persona pesa más en la Tierra, que es más grande Y ejerce mayor atracción, que en la Luna. También por ese motivo una persona gruesa pesa más que una persona delgada de la misma altura, al tener más masa, la persona gruesa es atraída con mayor fuerza hacia el centro de la Tierra.

**Textos literarios**: Son lecturas imaginativas, creadas principalmente con fines recreativos. Destacan del género narrativo, cuentos o fragmentos de cuento, fragmentos de novela, fábulas, leyendas o mitos; del género lírico, poemas o del género dramático (obras de teatro), alguna comedia, tragedia o drama.

Por ejemplo:

Dos monjes, Tanzán y Ekido, viajaban juntos por un camino embarrado. Llovía a cántaros y sin parar. Al llegar a un cruce se encontraron con una preciosa muchacha, vestida con un kimono y un ceñidor de seda, incapaz de vadear el camino.

-Vamos, muchacha -dijo Tanzán sin más, Y, levantándola en sus brazos sobre el barro, la pasó al otro lado.
Ekido no dijo ni una sola palabra, hasta que, ya de noche, llegaron al monasterio. Entonces no pudo resistir más.
-Los monjes como nosotros -le dijo a Tanzán- no deben acercarse a las mujeres, sobre todo si son bellas jovencitas. Es peligroso. ¿Por qué lo hiciste?
-Yo la dejé allí -contestó Tanzán-. ¿Es que tú todavía la llevas?

**Textos informativos:** Si se excluyen los tres tipos de texto ya vistos, todo otro tema que aparezca en el examen podrá ser catalogado como informativo, es decir lecturas que simplemente informan sobre algún suceso o tema más peculiar.

Por ejemplo:

*Doctor Who* es una serie de televisión británica de ficción producida por la BBC. Está dividida en dos etapas, la denominada serie clásica, emitida entre 1963 y 1989, y la serie moderna, iniciada en 2005 y que continúa emitiéndose, El programa muestra las aventuras de un señor del tiempo conocido como "El Doctor", que explora el universo en su "Tardis", una nave espacial con conciencia propia capaz de viajar a través del tiempo y el espacio. Por fuera, simula ser una cabina de policía azul, que era un elemento común de las calles del Reino Unido cuando la serie comenzó en 1963. Con la ayuda de distintos acompañantes, el Doctor se enfrenta a una variedad de enemigos mientras salva civilizaciones, visita tanto el pasado como el futuro, ayuda a gente común y corrige injusticias. Forma parte también de la serie oficial un telefilme emitido en 1996 titulado "Doctor Who: La película" producida entre Reino Unido, Estados Unidos y Canadá.

**Textos críticos**: Un texto crítico puede abordar temas de cualquiera de los cuatro tipos de texto anteriormente vistos. La diferencia con estos, y su característica principal, es que el autor expresa su opinión del tema tratado.

Por ejemplo:

Tal como se practica entre nosotros, el llamado comentario de textos me parece una cuestión técnicamente inadmisible y didácticamente retrógrada, Ni estimula el hábito de la lectura ni fomenta la reflexión ni educa el gusto. Las muestras, además, no se seleccionan bien ni se incluyen nunca textos procedentes de literaturas en otras lenguas. Y, por si fuera poco, se usan como tema de comentario fragmentos de obras no leídas. Y, sin embargo, no es esto lo peor: aunque los textos fueran seleccionados con un gusto impecable y aunque los comentarios versaran sobre muestras no mutiladas, seguiría siendo erróneo el método. Su fundamento teórico y sus presupuestos filosóficos son inadmisibles. Comprender un texto no consiste en aplicarle una receta de manual escolar.

EJEMPLO DE EJERCICIO.

Para dominar al prójimo hay que conocerlo y quererlo. Tratando de imponerle mis ideas es como recibo las suyas. Amar al prójimo es querer que sea como yo, que sea otro yo. Mi esfuerzo por imponerme a otro, por ser y vivir yo en él, es lo que da sentido religioso a la colectividad, a la solidaridad humana. El sentimiento de solidaridad parte de mí mismo; como soy sociedad, necesito adueñarme de la sociedad humana; como soy un producto social, tengo que socializarme. De primera intención protesto contra el inquisidor, y a él prefiero al comerciante que viene a colocarme sus mercancías; pero si recogido en mí mismo lo pienso mejor, veré que aquel, el inquisidor, cuando es de buena intención, me trata como a un hombre, como a un fin en sí, pues si me molesta es por el caritativo deseo de salvar mi alma. Mientras que el otro no me considera sino como a un cliente, como a un medio, y su indulgencia y tolerancia no es en el fondo sino la más absoluta indiferencia respecto a mi destino. Hay mucha más humanidad en el inquisidor.

TIPO DE TEXTO: Crítico.
IDEA PRINCIPAL: Contradicciones en las relaciones humanas.

## GÉNEROS DISCURSIVOS

**¿Qué es un discurso?**

Se considera como discurso o secuencia discursiva a un conjunto de enunciados que se utilizan dentro de un texto para cumplir una función comunicativa parcial dentro de un texto que tiene una intención comunicativa mayor.

### Discurso narrativo

La secuencia del discurso narrativo se integra a partir de algunos elementos básicos: debe estar inscrito bajo una condición temporal y espacial, que conforma su contexto; asimismo, se debe tener un asunto que sea el centro de lo relatado, debe ir desarrollando acciones y, por consiguiente, tener un agente que sea quien las lleve a cabo. Las acciones se conducen de manera lógica y encadenada, por lo que se generaría una relación de causalidad entre ellas.

Por ejemplo:

Una mañana se levantó y fue a buscar al amigo, al otro lado de la valla. Pero el amigo no estaba y, cuando volvió, le dijo la madre: "el amigo se murió. Niño, no pienses más en él y busca otros para jugar". El niño se sentó en el quicio de la puerta, con la cara entre las manos y los codos en las rodillas. "Él volverá", pensó. Porque no podía ser que allí estuviesen las canicas, el camión y la pistola de hojalata, y el reloj aquel que ya no andaba, y el amigo no viniese a buscarlos. Vino la noche, con una estrella muy grande, y el niño no quería entrar a cenar. "Entra, niño, que llega el frío", dijo la madre. Pero en lugar de entrar, el niño se levantó del quicio y se fue en busca del amigo, con las canicas, el camión, la pistola de hojalata y el reloj que no andaba. Al llegar a la cerca, la voz del amigo no le llamó, ni le oyó en el árbol, ni en el pozo. Pasó buscándole toda la noche. Y fue una larga noche casi blanca, que le llenó de polvo el traje y los zapatos. Cuando llegó el sol, el niño, que tenía sueño y sed, estiró los brazos y pensó: "qué tontos y pequeños son esos juguetes. Y ese reloj que no anda, no sirve para nada". Lo tiró todo al pozo y volvió a la casa, con mucha hambre. La madre le abrió la puerta y le dijo: "cuánto ha crecido este niño, Dios mío, cuánto ha crecido". Y le compró un traje de hombre, porque el que llevaba le venía muy corto.

En el ejemplo anterior es posible apreciar los elementos mencionados; se tiene un asunto, que es el contar de forma alegórica cómo un ser humano deja atrás la infancia, tiene un agente, el niño, quien realiza las acciones, relacionadas unas con otras.

### Discurso descriptivo

Refiere las características o propiedades de un objeto. La descripción siempre supone entonces una forma de análisis, ya que implica la descomposición de su objeto en partes o elementos y la atribución de propiedades o cualidades. Entre las posibilidades que podría abarcar una descripción estarían, además de las características o cualidades, las partes que lo integran, las funciones que cumple y/o las circunstancias espaciotemporales en las que se halla, además de sus relaciones con otros elementos circundantes.

Por ejemplo:

He visto ayer en una ventana un tiesto lleno de lilas y de rosas pálidas, sobre un trípode. Por fondo tenía uno de esos cortinajes amarillos y opulentos, que hacen -pensar en los mantos de los príncipes orientales. Las lilas recién cortadas resaltaban con su lindo color apacible, junto a los pétalos esponjados de las rosas de té. Junto al tiesto, en una copa de laca ornada con ibis de oro incrustados, incitaban a la gula. manzanas frescas, medio coloradas, con la pelusilla de la fruta nueva y la sabrosa carne hinchada que toca el deseo; peras doradas y apetitosas, que daban indicios de ser todas jugo y como esperando el cuchillo de plata que debía rebanar la pulpa almibarada; y un ramillete de uvas negras, hasta con el polvillo ceniciento de los racimos acabados de cortar de la viña. Acérqueme, vilo de cerca todo. Las lilas y las rosas eran de cera, las manzanas y las peras de mármol pintado y las uvas de cristal.

En el ejemplo anterior es posible encontrar, elemento por elemento, los ponentes que integran el arreglo frutal que está próximo a la ventana. Se mencionan también algunas características de las frutas que se pueden ver en el frutero.

**Discurso expositivo**

Este tipo de discurso consiste en destacar el aspecto de la comprensión de un fenómeno determinado, a partir de conceptos con los que se pretende aprehender el tópico abordado por medio de procesos como el análisis o la síntesis. Algunas de las modalidades del discurso expositivo podrían ser causa- consecuencia, problema- solución, ventajas - desventajas, continuidad - discontinuidad, entre otros.

Algunas de las preguntas clave que el lector de un discurso expositivo podría hacerse podrían ser ¿por qué esto es así?, ¿qué lo hace posible?, ¿cómo funciona?, ¿cuál es la causa de esto? Los enunciados que respondan a estas preguntas necesitan estar estructurados en un orden lógico, gozar de una cohesión que facilite la comprensión del tema abordado.

Por ejemplo:

Molusco (del lat. Molluscus, blando) Zool. Tipo o filium animal con aproximadamente 120 000 especies, perteneciente a los deteróstomos, Los moluscos tienen piel blanda y sin protección, con frecuencia recubierta por la secreción del pliegue del manto, la concha. Han desarrollado una forma especial, la parte inferior del cuerpo, denominada pie, lo que permite que se desplacen arrastrándose. Se divide en dos subtipos. Los anfineuros son más primitivos, Exclusivamente marinos, están provistos de dos pares de cordones nerviosos, que atraviesan el cuerpo y forman una especie de sistema nervioso en escalera triple por medio de cordones conectivos. Las clases solenogastros, con 140 especies, y placóforos, con más de 1000 especies, pertenecen a este grupo. El segundo subtipo, conchíferos, comprende aquellos moluscos provistos de verdaderas conchas continuas.

**Discurso argumentativo**

Consiste en ofrecer razones que lleven a la defensa de un punto de vista. El objetivo último de una secuencia discursiva argumentativa es propiciar que el lector de un texto sea convencido o que logre aceptar la postura del autor. Un enunciado que tiene finalidad argumentativa usualmente se fundamenta en probabilidades y en la subjetividad de quien lo emite.
La organización retórica de este tipo de textos obedece a una estructura en la que impera una tesis, los argumentos y una conclusión. La tesis se considera la idea sobre la que se articula el resto del texto y usualmente puede localizarse al inicio o al final del texto. En la secuencia argumentativa, con relativa frecuencia pueden incorporarse algunos enunciados con intención expositiva, que, dentro de esta secuencia, se convierte en un apoyo para el punto de vista. Otros recursos frecuentes para la argumentación pueden ser las citas, la refutación, los ejemplos o los contraargumentos.

Por ejemplo:

Las tiendas y criaderos se dedican a explotar a cientos de mascotas hembras, sobre todo perras, las cuales son preñadas constantemente y separadas rápidamente de sus cachorros. Viven solitarias, en diminutos y sucios espacios hasta que los criadores ya no las consideran útiles y las abandonan en las calles. Cuando compras una mascota, apoyas a que este sucio negocio continúe. Los animales no son objetos que puedan intercambiarse Por dinero, sino seres que sienten y sufren igual que cualquiera de nosotros. Si deseas uno, acude a un albergue y adóptalo, La vida no tiene precio.

**Ejemplo de ejercicio.**

Los géneros periodísticos son formas de comunicación cuyo objetivo primordial es la transmisión de la información. Cada género supone ciertas estrategias de aproximación a los hechos por parte del emisor del mensaje; por ello, la función que juega este en relación con la realidad observada es un criterio para su clasificación. Hay que considerar, también, que el periodismo es un método de interpretación de la realidad que se enfoca, esencialmente, en la transmisión de esta al público. Por lo tanto, para la definición de los géneros se toman en cuenta también las maneras de representación y disposición de los hechos y los datos registrados.

TIPO DE DISCURSO: Expositivo.
IDEA PRINCIPAL: Criterios de clasificación de los géneros periodísticos.

## RECURSOS LITERARIOS

Un recurso literario es aquél que se emplea para "embellecer el mensaje"; este tipo de recursos no son exclusivos de los textos literarios de tal forma que, nosotros podemos hacer uso de dichos recursos con la finalidad de mejorar nuestro texto.

Los recursos literarios principales que debes estudiar para tu examen son los siguientes:

- Metáfora
- Símil
- Hipérbole
- Hipérbaton
- Personificación

### METÁFORA

Es, tal vez, la figura más conocida y muchas veces creemos que es la única figura que emplean los autores; por eso es importante que conozcas las características propias que posee la metáfora.

Una metáfora es el recurso estilístico que relaciona dos objetos (uno real y uno imaginario) que comparten ciertas características.

En el ejemplo:

**"Sus ojos son luceros"**

Los objetos comparados comparten la cualidad del brillo.

### SÍMIL

Al igual que la metáfora, el símil, establece una comparación, solo que lo hace a través de un nexo "comparativo".

Mientras que la expresión:

"Sus ojos son luceros" es una metáfora; la expresión:

**"Sus ojos son como luceros"** es un símil porque la relación se da por medio del nexo **"como"**

Otro ejemplo de símil es:

**"Tus dientes blancos como perlas"**

## HIPÉRBOLE

Es el recurso literario que exagera la realidad, ya sea aumentándola o disminuyéndola; se emplea para lograr una mayor fuerza expresiva.

El verso:

**"No hay extensión más grande que mi herida"**

(Miguel Hernández)

Es un ejemplo de hipérbole porque se exagera el tamaño de una herida (sentimiento).

## HIPÉRBATON

El hipérbaton es una figura literaria que consiste en la alteración del orden natural de la oración, con el propósito de hacer énfasis sobre alguna de sus partes o de lograr cierto tipo de métrica o de rima.

En español el orden lógico de una oración es:

Sujeto + Verbo + Complemento
**Roberto se arregló con esmero.**

En un hipérbaton el orden de una oración es:

Complemento + Verbo + Sujeto
**Con esmero se arregló Roberto.**

## PERSONIFICACIÓN O PROSOPOPEYA

Figura que consiste en atribuirle cualidades humanas a objetos inanimados o animales:

"El viento de la noche gira en el cielo y canta."

Pablo Neruda (1924)

En el ejemplo anterior se le está atribuyendo la cualidad de cantar y girar al viento.

## GÉNEROS LITERARIOS

Los géneros literarios son los grupos en que clasificamos a los textos, según su contenido. Existen cuatro grandes géneros literarios.

- Narrativo.
- Lírico o poético.
- Dramático.
- Didáctico.

Estos se dividen, a su vez, en subgéneros.

## GÉNERO NARRATIVO

La narrativa es el género que se caracteriza, principalmente, por contar historias. Se trata de un género donde abundan las descripciones, tanto de personajes, como de situaciones o escenarios. Su forma de expresión natural es la prosa, aunque incluye a menudo diálogos o elementos propios de otros géneros.

Atendiendo al contenido y forma de la narración, podemos dividir al género narrativo en seis subgéneros:

**El cuento**
Relata una historia, real o ficticia y relativamente sencilla, a través de personajes y situaciones. Se divide en tres partes básicas: introducción, nudo y desenlace y por lo general responden a un esquema narrativo tradicional.

**El relato**
Incluye todo tipo de narraciones de corta duración, que relatan una historia real o ficticia, aunque no sigue necesariamente los esquemas tradicionales del cuento.

Su estructura y contenido depende fundamentalmente del autor y en mucha menor medida de la tradición popular.

**La novela**
De trama larga y por lo general compleja, la novela nos cuenta una historia real o ficticia, a través de una miríada de personajes y situaciones. Su relato puede atender a la línea temporal de los acontecimientos o romper con ella. Se trata del género narrativo por excelencia, pues permite el más amplio desarrollo de todos los recursos narrativos.

Además, puede incluir también diálogos, textos poéticos o didácticos, fusionando diferentes géneros con facilidad.

**La fábula**
Se trata de un relato con un final moralista. Es decir, la fábula busca narra una historia ficticia con el objetivo de aportar una lección moral para el lector.

Suele entremezclar personajes humanos, animales o también objetos animados y responde a las creencias o valores compartidos de una determinada comunidad o cultura.

Las historias narradas en las fábulas buscan aportar una enseñanza a lector sobre la vida, el bien y el mal.

**La leyenda**
Se trata de un relato que entronca con la tradición e historia de una determinada comunidad, narrando acontecimientos que mezclan elementos reales y ficticios sobre el pasado común. Sus protagonistas se presenten a menudo como reales ante la comunidad, aunque con características sobrenaturales, mágicas o fuera de lo común, que los hacen destacar por encima del resto.

Proceden de la tradición oral, pero se han trasmitido también escritas. Con el tiempo suelen sufrir alteraciones en su contenido, fruto del paso del tiempo y de los distintos narradores.

**El mito**
Los mitos son narraciones que cuentan el pasado y los hitos fundacionales de una determinada comunidad. También explican fenómenos cuyo origen es o fue desconocido para esa comunidad, como los meteorológicos, astronómicos, etc.

Al carecer de veracidad histórica, se trata de relatos ficticios, aunque cuenten con elementos propios de la realidad vivida por un pueblo. En ellos se mezclan protagonistas humanos, con dioses o héroes de cualidades extraordinarias.

## GÉNERO LÍRICO

La lírica es el género propio de los sentimientos. A través de ella se expresan emociones, está conectado a los sentidos. Su característica principal es la expresividad y su género por excelencia el poema.

La forma natural de los poemas es el verso, aunque algunos subgéneros utilizan también la prosa poética. Dentro del verso podemos encontrar formas rimadas, cadencias o disposiciones acentuales marcadas.

La lírica se divide, además, en dos grandes grupos:

**Géneros mayores**

Compuesto por 6 subgéneros:

**Oda**: poema que exalta el objeto lírico.
**Égloga**: monólogo o diálogo amoroso. Se centra en el hablante y sus sentimientos.
**Elegía**: exaltación del sentimiento del hablante lírico.
**Canción**: poema de gran musicalidad, que busca ser acompañado de instrumentos.
**Himno**: poema de alegría y celebración.
**Sátira**: poema de carácter burlesco.

**Géneros menores**

Destacan fundamentalmente tres, propios del cantar popular:

**Soneto**: composición poética formada por catorce versos endecasílabos, con rima consonante, y agrupados en cuatro estrofas.
**La letrilla**: poema en estrofas, cuyo objetivo es ser musicalizado.
**Epigrama**: poema muy corto y de tono burlesco, como la sátira.

## GÉNERO DRAMÁTICO

El drama es el género propio de las obras de teatro. Reproduce escenas entre distintos personajes, mostrando sus acciones, pero también sus sentimientos o voz interior. Su forma natural es el diálogo o el monólogo. Se escribe a través de guiones, que incluyen también descripciones de los escenarios donde se desarrolla la obra.

Está ligado, por tanto, a la historia del teatro y su origen se encuentra en la Antigua Grecia. Son textos a cuya representación se añaden elementos no verbales, como la luz, el sonido, etc., que aportan un valor añadido al texto.

Al igual que la lírica, en el drama se habla de dos grandes clases de géneros.

**Géneros mayores**

**La tragedia**: Presenta los problemas y conflictos propios de la vida de los seres humanos de forma cruda. Por tanto, son obras que abordan temas como el amor, la muerte, el poder, la traición, los celos, los infortunios, la luchas, etc. y que lo hacen con los sinsabores propios de la vida.
**La comedia**: Presenta los mismos problemas y conflictos propios del ser humano, pero bajo un tono de humor.
**La tragicomedia**: Mezcla elementos de ambos géneros.

**Géneros menores**

**Farsa**: obra breve, cuyo objetivo es caricaturizar personajes o situaciones.
**Sainete**: pieza corta y de tono burlesco.
**Auto o auto sacramental**: drama litúrgico propio de la Edad Media.
**Entremés**: pieza breve, cuyo objetivo es representarse entre jornadas teatrales.
**Vodevil**: obra ligera, que incluye también representaciones musicales.

## GÉNERO DIDÁCTICO

La didáctica es el género mediante el cual se transmiten conocimientos a través de la escritura. Tiene una finalidad puramente divulgativa y se desarrolla mediante textos descriptivos.

Su origen es prácticamente tan antiguo como el lenguaje escrito. Existen diferentes subgéneros, en función del conocimiento o información que buscan transmitir.

**Textos educativos**
Son textos destinados a la enseñanza y transmisión de conocimientos específicos. Están adaptados al nivel del receptor, desde niños hasta textos científicos o expertos en cualquier materia.

Existen diferentes formatos: lecturas, lecciones magistrales, textos de preguntas y respuestas, etc.

**Ensayos**
Texto que ofrece una opinión argumentada sobre determinado tema. Suelen ser textos largos, que sintetizan diferentes ramas del conocimiento y donde se muestran diferentes puntos de vista para llegar a una conclusión o conclusiones.

De extensión muy variada, abordan cualquier tipo de conocimiento o información. Por eso existen ensayos históricos, periodísticos, políticos, científicos, etc.

**Tratados**
Los tratados son textos que necesitan de conocimientos previos para ser comprendidos en su totalidad. Ofrecen información específica sobre una materia determinada. Están escritos por especialistas y sujetos a revisiones por parte de pares u otros expertos en la materia.

**Poema didáctico**
Género que busca transmitir conocimientos mediante la escritura en verso. Sus orígenes se encuentran en la Antigua Grecia.

El islam ha hecho también un uso extenso de este tipo de textos didácticos.

## INFERENCIAS.

Para algunos alumnos resulta complicado comprender lo que es una inferencia, de manera que en este apartado se explicará de forma somera lo que este tipo de preguntas pretenden que el estudiante conteste.

Un sencillo ejemplo se puede percibir en la oración:

*Yo también creía que él ya había llegado.*

Acerca de este enunciado es posible obtener la siguiente información que no se encuentra de forma explícita:
1.- La persona de quien se está hablando no había llegado.
2.- Yo desconocía ese hecho.
3.- En el contexto de esta oración está presente otra persona que también desconocía la ausencia de la persona aludida.

Como el alumno puede apreciar, aún de elementos muy pequeños de un texto es posible extraer inferencias, que, como también se puede observar, toman como fundamento la información propuesta en una lectura. Al mencionar que esto es una base, queda eliminada la posibilidad de que una respuesta a una pregunta de inferencia pueda ser información textual. De tal manera, una inferencia podría quedar mejor definida como la decodificación de información que queda parcialmente oculta en el texto, pero que es posible desvelar a partir de elementos de la lectura.

El estudiante debe adoptar una actitud de agudeza en la revisión de la información del texto porque la validez de una inferencia en particular está dada por el juego de opciones que acompañen la pregunta.

Las inferencias relacionadas con el texto pueden ser sencillas o un poco más elaboradas, para esto se analizarán dos ejemplos a continuación.

### Ejemplo.

> El cuento "El revólver" de Emilia Pardo Bazán presenta varios ejemplos de ironía estable e inestable. A la primera categoría pertenece la ironía de que el revólver que causó tanto pánico en la protagonista que enfermó del corazón, estaba descargado. La segunda categoría de ironía (5) no es tan obvia; es necesario conocer la situación de la mujer en el siglo XIX. Pardo Bazán realiza una crítica feminista en este cuento y el "poder" del revólver descargado representa por analogía el "poder" del hombre sobre la mujer. Es decir, la ironía de que durante siglos la mujer se sometió al dominio de la aparente superioridad del hombre (al igual

(10) que el aparente peligro del revólver -descargado— enfermó a la protagonista del cuento).

1. ¿Qué se puede decir acerca de la ironía estable?
A) es la categoría que más se ha desarrollado en textos narrativos.
B) es una categoría que corresponde a situaciones vividas por mujeres.
C) es necesaria para comprender el contexto.
D) se podría interpretar con la información del contexto.

*Lo primero que el estudiante debería tomar en cuenta es la manera en la que está redactada la pregunta. En este caso no se está utilizando el verbo inferir, pero se sustituye con las palabras "se puede decir", que cumplen con la misma función. Como segunda apreciación, el estudiante debería tener ubicada la parte en donde se está desarrollando el punto acerca de la ironía estable. En esa parte únicamente se describe la situación narrada en el relato de Pardo Bazán, por lo tanto no ofrece suficiente apoyo contextual para analizar las opciones de respuesta. De forma contigua, los enunciados relacionados con la ironía inestable afirman que es necesario que esté apoyada por conocimiento previo acerca de la situación la ironía estable y la inestable son opuestas, por lo tanto, si la ironía inestable necesita conocimientos extra a lo que ofrece la lectura, la ironía estable podría comprenderse con la información de la lectura, por lo que el inciso con la respuesta correcta es el D.*

2.- ¿Qué se puede implicar del texto?
A) Es chusco que las pistolas falsas causen tantos estragos.
B) Durante el siglo XIX los hombres ostentaron una supremacía que no se sostenía en evidencias sólidas.
C) Emilia Pardo Bazán utiliza la ironía en su cuento "El revólver".
D) Los hombres en el siglo XIX sometían a las mujeres utilizando armas de grueso calibre.

*En este segundo ejemplo de inferencia se utiliza en la pregunta la palabra "implicar", lo que indica al estudiante que se trata de una pregunta en la que hay que hacer un proceso de deducción de la respuesta. En la opción (A) se muestra una información que no corresponde con el sentido de la lectura, por lo tanto no se puede elegir como respuesta correcta. La opción (C) consigna un hecho que la misma lectura ya incluye, por lo que no se está efectuando ninguna operación para extraer información implícita. La opción (D) se trata de algo absurdo. Por otro lado, la opción (B) muestra información que la lectura aborda, únicamente se expresa con otras palabras. Aunque a esto no se le podría llamar inferencia, sino paráfrasis, frecuentemente esta se puede considerar como respuesta correcta cuando ninguna otra le da al estudiante una relación de dos segmentos de información o la posibilidad de realizar una operación para extraer datos que no están manifestados abiertamente.*

Una pregunta que está estrechamente relacionada con la microhabilidad de inferir es aquella que solicita al estudiante una evidencia. Con esto lo que se le pide al estudiante es que ubique aquella parte del texto que ofrece la informaci0n explícita a partir de la cual se puede extraer el dato que se encuentra, de alguna manera, oculto en la lectura. En este sentido el lector debe rastrear cuál es la información que le ayuda, de mejor manera, a encontrar el dato que no está presente. En este caso las respuestas siempre van a consignar los números de línea que muestra la información con la que se puede construir la inferencia.

3. ¿Cuál es la opción que provee la mejor evidencia para el texto anterior?
A) Líneas 2-4 ("A la primera... estaba descargado").
B) Líneas 4-6 ("La segunda... en el siglo XIX").
C) Líneas 7-8 ("El 'poder... sobre la mujer").
D) Líneas 9-11 (“La ironía... -descargado-").

*Para este tipo de preguntas que solicitan una evidencia es preciso no perder de vista que el estudiante las encontrará con generalmente después de una pregunta de inferencia, de manera que el alumno, para responder a estas preguntas debe haber leído ya el texto y ubicado la respuesta de la pregunta de inferencia. Debido a esto el alumno debe tener ya identificada la parte de la lectura que le ayuda a contestar la pregunta de inferencia, por lo que únicamente habría que contrastar si la respuesta elegida concuerda con alguna de las líneas que se proponen como opciones.*
*En esta pregunta la respuesta elegida es la (C), ya que, como se había mencionado, es una paráfrasis de lo que el texto plantea, además de algunos otros detalles que pueden hacer al alumno caer en cuenta de que es la respuesta correcta. Uno de los elementos es que el concepto del poder masculino utiliza comillas, por lo que se puede comprender que no se está utilizando la palabra en su sentido literal; otro elemento que utiliza la lectura es la palabra "aparente" lo que refuerza la idea de que este uso de autoridad no está fundamentado en algo que le dé veracidad o autenticidad, sino que, al ser aparente, únicamente está basado en usos y costumbres y no en algo real.*

## COMPARACIÓN Y CONTRASTE DE IDEAS

### Ejemplo.

**LECTURA A**

La adición de azúcar se usa fundamentalmente en la elaboración de mermeladas, jaleas y dulces (concentrados de azúcar). Esto involucra hervir la fruta, adicionar el azúcar en cantidades variables dependiendo de la fruta y el producto a preparar, y continuar hirviendo hasta que alcance el nivel de sólidos solubles que permita su conservación.

La adición de azúcar más ciertas sustancias de las frutas producen la consistencia de gel que conforma la textura de las mermeladas y jaleas. Para lograr esto es necesario que exista un nivel de acidez y un porcentaje de azúcar adecuados.

Algunas frutas no tienen la sustancia llamada pectina en cantidad suficiente para formar un gel adecuado, en cuyo caso es necesario agregarles una pectina exógena.

Existe diferencia entre las manzanas o cítricos y las moras, como la frambuesa o la frutilla. En los primeros hay un alto nivel de pectina, no así en los segundos.

Durante el proceso de hervir la fruta con el azúcar, la sacarosa (que es el azúcar agregado) se desdobla en parte en sus componentes (fructosa y glucosa), lo que permite dos importantes efectos en el producto: mayor solubilidad que evita la cristalización y, por otra parte, un mayor dulzor. Este proceso se denomina inversión de la sacarosa.

Las mermeladas y los otros productos nombrados se conservan debido a un principio denominado actividad de agua. La actividad de agua es la disponibilidad de agua libre para reaccionar y permitir el desarrollo de los microorganismos. Mientras menor sea la actividad de agua, menor la incidencia de reacciones que deterioran y microorganismos. El nivel alto de agua libre en las mermeladas permite el desarrollo de mohos. De esta manera, si se desea conservar el producto se debe contar con el uso de vacío en su envasado, mediante el llenado en caliente o, el uso de sustancias químicas fungistáticas, como benzoato de sodio y sorbato de potasio, que impiden el desarrollo fúngico. De ser posible, siempre es mejor la primera alternativa, aunque requiere de envases de vidrio, que son más caros.

**LECTURA B**

La mayor parte de los alimentos podrían conservarse en buenas condiciones microbiológicas cuando el medio tiene un pH menor de 4.0, de modo que se han desarrollado, para frutas y hortalizas, una serie de métodos que persiguen controlar el ph mediante la producción endógena de ácido o por adición exógena de algún ácido orgánico como el acético, el cítrico e incluso el láctico.

La acidificación de hortalizas de baja acidez para poder procesarlas mediante esterilización comercial, con períodos cortos a temperaturas de alrededor de 100° C, es una metodología muy práctica para trabajar a pequeña escala, incluso a escala artesanal.

La preparación de encurtidos de diversas hortalizas, mediante una fermentación natural con producción de ácido láctico, es también un método muy adecuado de conservación para pepinillos, cebollitas, zanahorias, pimiento y otras que regularmente se comercializan en grandes volúmenes en todo el mundo. Lo importante es controlar el pH hasta un nivel de alrededor de 3.5, de manera de tener un nivel de acidez adecuado para obtener un producto de agradable sabor en términos de ácido láctico. Este es producido naturalmente, por la fermentación de sustratos constituyentes del material, por acción de microorganismos presentes en él.

La acidez de un encurtido que ha sido preparado por adición de ácido acético o vinagre, debe ser de alrededor de 4% y hasta 6%, expresado en acidez cítrica. Además del ácido los encurtidos son adicionados de sal, la cual tiene una reconocida propiedad antiséptica y, en niveles adecuados puede asegurar una buena calidad del producto por mucho tiempo, además de dar buenas características sensoriales de textura y sabor al producto.

Antes de analizar preguntas de este par de lecturas, se recomienda examinar la introducción y las semejanzas y diferencias:

La introducción remite a que las lecturas tratan de procesos para elaborar ciertos tipos de alimentos y aclara que ambas se centran en la conservación de los mismos, lo que no significa que sean lecturas exclusivas sobre conservación de alimentos, sino que también toca otras variantes. Además agrega los nombres de los productos elaborados: mermeladas y jaleas, lectura A; encurtidos, lectura B.

Conviene también, según lo ya comentado, establecer las semejanzas y diferencias entre las lecturas:

**Semejanzas:** Ambas lecturas:
• Mencionan un proceso de elaboración de alimentos que permite mayor durabilidad de los mismos.
• Por lo tanto, se centran en la conservación de los mismos.
• Señalan los alimentos a los que se pueden aplicar los respectivos procesos.

**Diferencias:**
• La lectura A trata un proceso principalmente para frutas, y la lectura B, para frutas y hortalizas.
• En la lectura A los productos son mermeladas y jaleas (concentrados de azúcar); en la lectura B, encurtidos (alimentos acidificados).

• El proceso de preparación, en la lectura A, se basa en la adición de azúcar; en la lectura B, acidificación.
• El proceso de conservación es, para la lectura A, el descenso de la actividad del agua; para la lectura B, la disminución del pH.

1.- A diferencia del contenido de la lectura B, que se enfoca en encurtidos, la lectura A trata de...

(A) la adición del azúcar.
(B) la acidificación de hortalizas.
(C) la actividad del agua.
(D) concentrados de azúcar.

*Esta clásica pregunta se contesta con la información de la introducción de las lecturas. En dicha información se menciona que la lectura A trata de mermeladas y jaleas (concentrados de azúcar) y la lectura B, de encurtidos. Como la pregunta señala que la B se enfoca en encurtidos, se entiende que el complemento (lectura A) debe mencionar también un enfoque similar: mermeladas y jaleas (concentrados de azúcar), inciso (D). Esto permite eliminar los demás incisos, que aunque son parte de la lectura A, no son el tema, sino parte del mismo. El inciso (B) es parte de la lectura B.*

2.- ¿Qué tienen en común ambas lecturas?

(A) Ambas hablan sobre métodos de conservación de alimentos, sobre todo frutos y hortalizas.
(B) Una menciona el vacío como solución y en la otra se dice que es la acidez.
(C) Mencionan que mientras menor actividad de agua tenga un alimento, mayor será su durabilidad.
(D) Ambos textos citan la adición de sal para asegurar una buena calidad del producto.

*La pregunta pide una semejanza, algo en común, y en el análisis ya se había especificado que ambas lecturas son sobre procesos de preparación de alimentos, centrándose en su conservación, inciso (A), lo cual también se menciona en la introducción, además que la lectura A se aplica a frutos y la B, a frutos y hortalizas. La respuesta (B) es el distractor que marca alguna de las diferencias en cuanto a la solución de la conservación. El inciso (C) es falso y solo aplicado a la lectura A. El inciso (D) indica la adición de sal, pero esto solo se menciona en la lectura B.*

3.- Ambas lecturas tratan de procesos de elaboración de alimentos, y la diferencia fundamental es que...

(A) ambas lecturas hablan de elaboración y conservación de alimentos.
(B) la lectura A se centra en concentrados de azúcar y la lectura B, en encurtidos.

(C) la lectura B es sobre cosas dulces y la lectura A, sobre alimentos acidificados.
(D) en la lectura A hay mucha azúcar y en la lectura B, mucho ácido.

*Esta forma de pregunta es la más sencilla, ya que no pide el orden en el que deban aparecer las respuestas; en estas se señala a qué lectura pertenecen. Por lo tanto, basta que el inciso elegido mencione datos ciertos de la lectura correspondiente, sin importar si aparece primero la lectura A o la lectura B. Este es el caso del inciso (B), donde es cierto que la lectura A se centra en concentrados de azúcar y la B, en encurtidos. El inciso (C) también señala cosas ciertas, pero de lecturas invertidas. El inciso (D) parece similar al (B), solo que señala que aquello de lo que se habla está contenido en la lectura. Por último, el inciso (A) es el clásico distractor de una respuesta correcta pero que se trata de semejanza, no de diferencia.*

4- ¿Cuál inciso establece una diferencia entre el método descrito en la lectura B y el de la lectura A?

(A) La sustancia añadida que produce el efecto conservador es el azúcar, a diferencia del ácido acético en el otro proceso.
(B) Es únicamente aplicable para frutas y el otro solo para frutas y hortalizas.
(C) La forma de preservar los alimentos es mediante la disminución del pH, y no mediante el descenso de la actividad de agua.
(D) Por la cantidad de pasos que se necesitan es más costoso que el otro método que es más rentable.

*Este es un ejemplo en el cual se debe tener muy claro el orden de la pregunta y las posibles respuestas; si la pregunta menciona primero la lectura B, la respuesta debe mencionar al principio algo correcto de la lectura B y, posteriormente, algo correcto de la lectura A. En este caso, el inciso (C) menciona primero la disminución del pH de la lectura B, lo que es correcto; luego, el descenso de la actividad del agua de la lectura A, que también es cierto.*
*En cambio, el inciso (A) invierte los textos (por eso se anula): primero señala algo erróneo de la lectura A, ya que el azúcar no es el conservador, y luego algo cierto de lectura B. En el inciso (B) se dan dos datos ciertos: el proceso en la lectura A es aplicable para frutas y en la lectura B, para frutas y hortalizas, pero invierte el orden de la pregunta, por eso se descarta. El inciso (D), aunque hablara primero de la lectura B, no define los pasos y el costo y con la información de las lecturas no lo podemos saber.*

5.- Una semejanza que se puede establecer entre ambas lecturas es que...

(A) la lectura A habla de un proceso aplicable a frutas, mientras que la lectura B es para frutas y hortalizas.
(B) ambas mencionan como preparar platillos sin microorganismos.

(C) en ambas se mencionan ejemplos de los alimentos que se procesan.
(D) una se centra en la preparación de dulces y la otra de alimentos agridulces.

*En este ejemplo se pide también una semejanza, pero a diferencia de las anteriores, la respuesta está centrada en detalles del tema. El inciso (C) es correcto porque la lectura A menciona manzanas, moras, frambuesas, etc., y la lectura B, pepinillos, cebollitas, zanahorias, etc. El inciso (A) es el distractor de la diferencia en lugar de la semejanza. El inciso (B) se descarta porque las lecturas no tratan de preparar platillos. La opción (D) también menciona diferencias.*

6.- Los autores de ambas lecturas estarían probablemente de acuerdo en que los procesos de conservación mencionados...

(A) son perfectos, pero no están completos.
(B) son esencialmente artesanales.
(C) han revolucionado la cosecha de frutos y hortalizas.
(D) inhiben la proliferación de microorganismos.

*La pregunta es una inferencia a partir de la información de ambas lecturas, por lo que la opción correcta debe concluir algo aplicable a los dos procesos de conservación. En el inciso (D) se dice que inhiben la proliferación (propagación, reproducción) de microorganismos; en la lectura A se señala que la menor actividad del agua disminuye el desarrollo de microorganismos, y en la lectura B que el pH menor a 4.0 permite conservar los alimentos en buenas condiciones microbiológicas, por eso es la respuesta correcta. El inciso (A) se descarta porque señala que son perfectos, pero no están completos (si no están completos, no son perfectos). El inciso (B) asegura que son esencialmente artesanales, lo que no sugieren ambas lecturas; solo en la lectura B se dice que podría realizarse a escala artesanal, pero no que fundamentalmente sea así. El inciso (C) propone que los procesos han revolucionado la cosecha de frutos y hortalizas, pero más bien podrían revolucionar la forma de mantener los alimentos comestibles por más tiempo.*

## ACENTUACIÓN

Se denomina **acento prosódico** (o simplemente acento) a la mayor fuerza de pronunciación que se carga sobre una sílaba de la palabra (a la que se denomina **sílaba tónica**). Una palabra puede ser tónica, si alguna de las sílabas que la componen presenta este acento, o átona, si ninguna de sus sílabas sobresale de las demás. Cualquier palabra pronunciada sola, fuera de contexto, es tónica. Solo en el contexto del discurso es posible determinar si una palabra es átona.

Las palabras átonas son escasas en número, pero muy importantes por el uso extensivo que se hace de ellas. Entre ellas podemos citar las siguientes:

- los artículos determinados: el, la, lo, los, las...
- las formas apocopadas de los adjetivos posesivos: mi, tu, su...
- los pronombres personales que realizan la función de complemento sin preposición: me, nos, te, os, le, la, lo, los, las, les, se.
- los relativos: que, cuanto, quien, cuyo.
- los adverbios relativos con funciones no interrogativas o exclamativas: donde, cuanto...
- las conjunciones: y, o, que, si, pues, aunque...
- casi todas las preposiciones: de, con, a...

Se llama **tilde** o acento ortográfico a una rayita oblicua (´) que baja de derecha a izquierda del que lee o escribe, y que se pone, en los casos adecuados, sobre alguna de las vocales de la sílaba tónica de la palabra.

**Clasificación de las palabras según su acento:**

Las **palabras agudas** son aquellas que tienen el acento prosódico en la última sílaba.

- con-ver-sar
- pas-tor
- o-ra-ción
- va-lor

Las **palabras llanas o graves** son aquellas que tienen el acento prosódico en la penúltima sílaba.

- pro-tes-tan-te
- li-bro
- di-fí-cil
- án-gel

Las **palabras esdrújulas** son aquellas que tienen el acento prosódico en la antepenúltima sílaba.

- prés-ta-mo
- ag-nós-ti-co
- cré-di-to
- lle-gá-ba-mos

Las **palabras sobreesdrújulas** son aquellas que tienen el acento prosódico en una sílaba anterior a la antepenúltima sílaba. Siempre llevan tilde.

- di-fí-cil-men-te
- de-vuél-ve-me-lo
- fá-cil-men-te
- á-bre-me-lo

## Ejemplos.

1. Elige la opción que está acentuada INCORRECTAMENTE.

Quiero que él me dé el libro de mí hermano.
a) él
b) dé
c) el
d) mí

Respuesta D
Este ejercicio evalúa la acentuación de los monosílabos. Como lo leíste en la presentación, se usa tilde en los monosílabos para distinguir que pertenecen a categorías gramaticales diferentes. Mí (con tilde) es pronombre. En la oración “mi” funciona como adjetivo posesivo y no debe llevar tilde.

2. ¿Qué palabra subrayada tiene un error de acentuación?

Hoy, sí me dices que sí iré por ti al trabajo.
a) sí
b) sí
c) iré
d) ti

Respuesta A
Esta es otra pregunta relacionada con monosílabos. Si (sin tilde) es una conjunción que expresa condición, mientras que sí (con tilde) es un adverbio que expresa afirmación. El primer “sí” en la oración no necesita una tilde. Por tanto, el error está en A.

## SIGNOS DE PUNTUACIÓN

Los signos de puntuación son un elemento fundamental de la buena redacción. Cada signo se considera una grafía, por tanto, ocupa un espacio y tiene un significado, así como una función especial dentro del texto. Además, los signos de puntuación facilitan la lectura y aclaran el sentido que se le está dando a la información. Se trata de factores que ayudan al escritor a organizar la información que quiere transmitir al lector y de qué forma. Ayudan a plantear las ideas de forma clara y estructurada.

### LA COMA

La coma es uno de los signos de puntuación con mayor número de usos y también de suma importancia. Aunque su uso puede variar, dependiendo del estilo o la intencionalidad del autor, existen reglas que debes considerar para un uso acertado de este signo. Los siguientes son los usos básicos de la coma.

1. Para separar elementos de la misma clase en un listado. Recuerda que el último elemento de la lista se separa con la conjunción "y".
Ejemplo: Salí al súper a comprar vegetales, leche, panes y pastas.

2. También se separan las oraciones pequeñas dentro de un periodo.
Ejemplo: Fuimos a caminar, a ver una película, a comer y regresamos a casa.

3. Para separar el vocativo del resto de la información. El vocativo es la persona, animal o cualquier entidad a que se le dice, ordena, pide, sugiere o suplica algo, dentro de la oración. Recuerda, siempre se separa con coma el vocativo, sin importar que se encuentre al principio de la oración, en medio o al final.
Ejemplos: Queridos amigos, me voy de aquí. / Me voy de aquí, queridos amigos. / De aquí queridos amigos, me voy.

4. Para separar información incidental en donde sea que se encuentre, al principio, en medio o al final. Una frase incidental es una interrupción en la oración. Las frases incidentales agregan información que no es esencia, más bien es complementaria y accesoria.
Ejemplos: Xóchitl, quien sabe bastante de música, quedo fascinada con el concierto. / Juan Rulfo, escritor mexicano de siglo XX, escribió el cuento "Diles que no me maten"

5. Para separar marcadores textuales o discursivos como: sin embargo, no obstante. O algunas conjunciones como: pero, sino, que. Recuerda, algunas de estas frases o palabras se encierran entre comas, mientras que otras solo la utilizan antes o solo después.
Ejemplos: El planeta tierra está muy deteriorado, sin embargo, podemos hacer algo para revertir el daño. / Te comprendo, pero no puedo ayudarte. / No es que sea chismoso, sino que me gusta estar informado.

6. Para separar dos oraciones copulativas o las partes de la oración que funcionan, respectivamente, como causa y consecuencia.
Ejemplo: En cuanto se acabó la comida, todos nos retiramos.

**EL PUNTO**

El punto es uno de los signos más importantes, debido a que separa ideas, párrafos o textos completos. Existen tres usos del punto. Punto y seguido, que se utiliza cuando todas las oraciones forman parte del mismo párrafo, debido a que desarrollan la misma idea. El punto y aparte se usa cuando se cambia de idea o se desarrolla un aspecto distinto del mismo tema y, entonces, se comienza a escribir en un nuevo párrafo. El punto final es para dar por terminado un texto.

Ejemplo: La biodiversidad es la variabilidad de organismos vivos. **PUNTO Y SEGUIDO** Esto, debido a que incluye la variabilidad de especies, la diversidad de los ecosistemas y la diversidad de los genes dentro de las especies. **PUNTO Y SEGUIDO** Se trata de una comunidad de plantas, animales y microorganismos que viven, se alimentan, se reproducen e interactúan en la misma zona o en el mismo medio ambiente. **PUNTO Y SEGUIDO** Según la variación y la distribución, se pueden considerar cuatro tipos de biodiversidad. **PUNTO Y APARTE**

**EL PUNTO Y COMA**

Este signo de puntuación es uno de los más subjetivos y, quizá, complejos, sin embargo, existen reglas precisas para aplicarlo correctamente.

1. Para separar elementos de una oración cuando incluyen coma. Se trata de una división mayor de elementos que ya tienen separaciones internas.
Ejemplo: Cada equipo saldrá por un lugar diferente: el azul, por la derecha; el rojo, por la izquierda; el verde, por la trasera; y el amarillo, por el frente.

2. Para sustituir el nexo que une a dos oraciones.
Ejemplo: La tesis estaba muy bien estructurada; fue aceptada por los sinodales.

**LOS DOS PUNTOS**

Este signo se encarga de anunciar información importante, es decir, de hacer una llamada de atención sobre lo que sigue.

1. Antes de un listado de elementos del mismo tipo.
Ejemplo: Hoy compré tres libros: uno de Cortázar, uno de Revueltas y otro de Elena Paz Garro.

2. Antes de una cita textual.
Ejemplo: Las palabras del médico fueron: "Mucho reposo y una alimentación equilibrada".

3. Después de las frases de salutación. En cartas, citatorios u otros documentos.
Ejemplo: A quien corresponda: / Estimados padres de familia:

## LOS PUNTOS SUSPENSIVOS

Estos tres puntos indican una interrupción de la oración o un final impreciso. Generalmente muestran alguna emoción.

A continuación, las reglas de su uso.

1. Para omitir información que no es necesaria, debido a que se sobrentiende que el listado no está concluido. En este caso los tres puntos funcionan como un "etcétera".
Ejemplo: En este bazar encontré de todo: comestibles, ropa, artículos de belleza, electrodomésticos, muebles, juguetes...

2. Para presentar un final inesperado en la oración.
Ejemplo: Y, entonces, temeroso se asomó a la habitación donde se escuchaban los rugidos y ahí estaba... un pequeño ratón.

3. Para indicar sentimientos o emociones como duda, pena, miedo, indecisión, etcétera.
Ejemplo: Sí quiero entrar a la competencia, pero... luego te explico.

## LOS PARÉNTESIS

Los paréntesis, en ocasiones, realizan funciones de otros signos de puntuación, por ejemplo, la coma o el punto. No obstante, existen varias especificaciones para darles un buen uso.

1. Se usan como las comas incidentales, para aislar una información explicativa o amplificadora. Sabemos que se necesitan paréntesis y no coma debido a que la información separada parece estar un poco distante del resto de esta, pero se encuentran ligadas a través de alguna relación como causa-consecuencia.
Ejemplo: Las asambleas (la última duró casi dos horas) se celebran en el auditorio Isabel Allende.

2. Se debe encerrar entre paréntesis las siglas y los acrónimos. Cuando se desglosa el significado de las siglas, solo uno de los elementos va entre paréntesis, es decir, las siglas o el desglose. También se encierran entre paréntesis datos que dan precisión a la información presentada, por ejemplo, años, estados, países, ciudades, etcétera.
Ejemplos: Aún recuerdo todo lo que sucedió cuando naciste (1986), sucesos inolvidables. / Si redactamos una nota acerca de la Dirección de Economía del Ministerio de Desarrollo Social (MIDES) debemos tener precauciones. / Jean-Paul Sartre (1905 - 1980).

3. Para introducir opciones en un texto. Puede ser en preguntas de opción múltiple, en textos que presenten la información ordenada por apartados o en esquemas.

## CONJUCIONES

Estas son palabras invariables que enlazan sintagmas, palabras u oraciones. Unen palabras, oraciones o periodos y ejercen relaciones entre estas. Para su estudio, las conjunciones se clasifican de la siguiente manera:

| **CONJUNCIONES COORDINANTES** | |
|---|---|
| Unen oraciones o palabras de igual categoría sintáctica. | |
| COPULATIVAS | Unen los componentes de una oración para indicar un orden: y, e, ni, que. |
| ADVERSATIVAS | Indican opciones excluyentes y contrapuestas: pero, mas, aunque, siquiera, sino, no obstante, sin embargo. |
| DISYUNTIVA | Para indicar una elección entre dos o más opciones: o, u, sea, bien. |
| DISTRIBUTIVAS | Indican distribución o alternancias entre opciones:<br>ya… ya, bien… bien, cerca… lejos, este… aquel, tanto… como. |

| **CONJUNCIONES SUBORDINANTES** | |
|---|---|
| Unen oraciones de distinta categoría sintáctica, estableciendo dependencia entre ellas, de manera que una está subordinada a la otra. | |
| CASUALES | Indican la causa, razón o motivo: pues, como, porque, ya que, puesto que. |
| COMPARATIVAS | Establecen una comparación entre los términos que vinculan: como, igual que, tal como, así como, más que. |
| CONDICIONALES | Indican una subordinación condicionada: si, con tal que, a menos que, dado que, siempre que. |
| CONCESIVAS | Indican una dificultad que no impide la acción: aunque, a pesar de que, si bien, por más que, por lo tanto. |
| CONSECUTIVAS | Establecen una consecuencia: así, luego, tan, tanto que, conque, así que. |
| FINALES | Indican una relación de finalidad: para, porque, a que, para que, a fin de que. |
| TEMPORALES | Indican una relación de precedencia temporal: cuando, mientras, antes, luego, apenas, en cuanto, antes de que. |

## PREPOSICIONES

Son palabras que sirven para unir y relacionar palabras u oraciones. Se trata de enlaces que subordinan y especifican la relación que existe entre dos términos o frases. Las preposiciones especifican y significan circunstancias como movimiento, dirección, lugar, tiempo, causa, posesión, pertenencia, materia, procedencia, etcétera.

| PREPOSICIÓN | ALGUNAS FUNCIONES | EJEMPLOS |
|---|---|---|
| A | Dirección<br>Tiempo | Iré a bailar.<br>Nos vemos en la noche. |
| ANTE | Frente a<br>En presencia de | Nos detuvimos ante el tráfico.<br>Se postró ante el rey. |
| BAJO | Debajo de<br>Lugar | Está dormido bajo la silla.<br>El libro está bajo el cuaderno. |
| CON | Modo<br>Medio | Debes leer con empeño.<br>Dibujó un círculo con el compás. |
| CONTRA | Oposición<br>Remedio | El viento en contra complicó el viaje.<br>Té contra el insomnio. |
| DE | Procedencia<br>Pertenencia | Chicle de Talpa.<br>El libro de mi padre. |
| DESDE | Tiempo<br>Punto departida u origen | Desde ayer.<br>Vinimos desde mi casa hasta aquí. |
| DURANTE | Simultaneidad | Durante las vacaciones también leo. |
| EN | Lugar<br>Medio | La reunión es en mi casa.<br>Me traslado en patineta. |
| ENTRE | Intervalo<br>Intermedio | Me hago entre 15 y 20 minutos.<br>Estoy entre el edificio azul y el parque. |
| HACIA | Dirección | Me dirijo hacia tu casa.<br>Nos vemos hacia el medio día. |
| HASTA | Límite<br>Incluso | La clase termina hasta que yo diga.<br>Hasta los perros saben decir “gracias”. |
| MEDIANTE | Medio | Comprendí mediante varias lecturas. |
| PARA | Motivo<br>Finalidad | ¿Para qué te levantas tan temprano?<br>Estos discos son para aprender inglés. |
| POR | Parte específica<br>Causa | Me tomó por el cabello.<br>Me preocupo por el bien de todos. |
| SEGÚN | Mod | Me comporto según me traten. |
| SIN | Carencia | Estoy sin ánimo. |
| SOBRE | Encima<br>Hora aproximada | Dejé el documento en el escritorio.<br>Llegaré sobre las diez de la noche. |
| TRAS | Detrás de<br>En busca de | El ratón se escondió tras la puerta.<br>La policía está tras él. |
| VÍA | Medio | Es más fácil llegar a mi casa vía Periférico. |

## VICIOS DEL LENGUAJE

Los vicios del lenguaje son errores que se cometen al hablar o al escribir; dichos errores pueden dificultar la interpretación del mensaje.

Los vicios del lenguaje que se estudiarán en esta unidad son:
- Barbarismos
- Redundancia
- Anfibología

### BARBARISMOS
La RAE define barbarismo como: "Incorrección lingüística que consiste en pronunciar o escribir mal las palabras, o en emplear vocablos impropios." (RAE, 2020). También caemos en barbarismos al utilizar palabras de origen extranjero cuando existe la palabra y el concepto en español.

Ejemplos:

¿**Estudiastes** para el examen?

Me gustan las **zanorias**.

¡Voy de **shopping**!

### REDUNDANCIA
Consiste en utilizar palabras innecesarias y que no añaden nada nuevo a lo que se quiere decir.

Ejemplo.

Es una persona muy humana ya que demuestra su humanismo.

### ANFIBOLOGÍA
Es una expresión que se presta a doble significado.

Por ejemplo:

"El médico le dijo al paciente que estaba enfermo."

¿Quién está enfermo?
Si analizas la expresión te darás cuenta de que no es clara y que no se entiende quién es el que está enfermo.

## SINÓNIMOS

Las palabras sinónimas son aquellas que se escriben diferente, pero tienen el mismo significado.

Ejemplo: bella/hermosa; apetito/hambre

Los sinónimos se usan para no repetir palabras. Lee el siguiente texto:

En una clase de mi colegio hay dos niños que son muy amigos, uno es feliz y el otro triste. Los dos niños, el feliz y el triste juegan en el patio.

Como puedes observar, las palabras destacadas se repiten y esto hace que el texto esté mal escrito. Para evitar esto podemos usar palabras sinónimas. niños/chicos; feliz/alegre; triste/apenado.

De esta manera, el texto quedaría mucho mejor redactado:

En una clase de mi colegio hay dos niños que son muy amigos, uno es feliz y el otro triste. Los dos chicos, el alegre y el apenado juegan en el patio.

## ANTÓNIMOS

Las palabras antónimas expresan significados contrarios. Ejemplo: lento/rápido; bueno/malo; grande/pequeño

En algunas ocasiones, algunos antónimos se forman con los prefijos a-, in-, des-, i-, im-, anti-.

Ejemplo: típico/ atípico; moral/ inmoral; legal/ ilegal; borrable/ imborrable; abrochar/ desabrochar; héroe/ antihéroe.

## ENUNCIADO Y ORACIÓN

**FRASE**

De acuerdo con la Real Academia de la Lengua Española (RAE,2014), una frase es un sintagma, esto es, un conjunto de palabras que se agrupan para formar un significado a partir de sus elementos.

Por ejemplo: La bella experiencia de vivir en el extranjero.

**ENUNCIADO**

Es un conjunto de palabras que, a diferencia de la frase o sintagma, tiene sentido completo y comunica una idea completa. Un enunciado puede constar de una sola palabra como ¡uy! Este es un ejemplo de un enunciado no oracional.
Un enunciado tiene entonación propia, lo que quiere decir que sabemos dónde empieza y termina, ya sea de manera oral o escrita. Si el enunciado es escrito, esta "entonación" está determinada por los signos de puntuación que usamos.

Por ejemplo: (1) ¿Quieres? (2) Sí, por favor. (3) ¡Gracias!

**ORACIÓN (Enunciado oracional)**

Es la unidad mínima de comunicación con sentido completo. Las oraciones cumplen con estas características:

1. Cada oración es una unidad independiente.
2. Expresan una idea completa.
3. Incluye por lo menos un verbo y, normalmente, se dividen en sujeto y predicado. Es posible que en algunas oraciones no haya verbo.

Por ejemplo: Anoche hizo mucho frío (por el tipo de verbo impersonal no hay sujeto) / Quiero un chocolate (sujeto tácito).

**ORACIÓN SIMPLE**

Las oraciones simples cumplen con las características mencionadas anteriormente. La que las hace diferentes de otro tipo de oraciones es que el predicado tiene un solo verbo conjugado o una perífrasis verbal. Las oraciones simples cumplen con funciones específicas como:

Declarar: Quiero un chocolate.
Preguntar: ¿Quieres un chocolate?
Ordenar: Tráeme un chocolate.

**ORACIÓN COMPUESTA**

Las oraciones compuestas tienen un predicado con más de un verbo conjugado. Existen tres maneras en las que las oraciones compuestas se forman: coordinación, subordinación y yuxtaposición. Aquí se explican las primeras dos. Observa los siguientes esquemas.

**Oraciones coordinadas**
Se forman con oraciones independientes. Un esquema que las representa es:

Nosotros vivimos en la ciudad y mis abuelos en el campo.

**Oraciones subordinadas**
Se forman con dos oraciones. Una depende de la otra. "porque aquí estudiamos" depende de la oración "Nosotros vivimos en la ciudad". Juntas forman una idea completa. Un esquema que las representa es:

Nosotros vivimos en la ciudad porque aquí estudiamos.

Ejemplos:

1. Selecciona la opción que contiene una oración subordinada.
a) Los sospechosos resultaron ser responsables.
b) El auto no parece de diseño sofisticado.
c) La comida mexicana es como la cubana.
d) Mándeme un mensaje si te gustó el regalo.

Respuesta D
Las oraciones subordinadas se conforman de dos partes. Una que es la oración dependiente y otra la independiente. Además, hay un nexo subordinante. En D la oración independiente es "mándame un mensaje". La otra contiene el nexo subordinante "sí".

2. Identifica el tipo de oración o enunciado.

No lo conozco, pero me cae mal.

a) Oración simple.
b) Oración coordinada.
c) Enunciado no oracional.
d) Oración subordinada.

Respuesta B
Este ejemplo presenta dos oraciones con significado independiente unidos por el nexo coordinante "pero".

## ESTRUCTURA DEL PÁRRAFO

Los párrafos normalmente tienen una oración inicial donde se plantea el tema central o la idea principal, oraciones de desarrollo que complementan la idea principal y una oración final que funciona como una conclusión del párrafo.

Por ejemplo.

| | |
|---|---|
| Las especias son fracciones de diferentes plantas cultivadas por sus propiedades aromáticas, pero siempre útiles para el empleo humano. | **Oración inicial** |
| Aunque consisten en rizomas, bulbos, cortezas, estigmas, frutos, semillas y hojas, por lo general se clasifican en las categorías de especias, semillas de especias y hierbas. Los primeros usos que tuvieron fueron medicinales. Los sacerdotes las usaban para la adoración y los rituales, y los chamanes las usaban como amuletos para mantener alejados a los malos espíritus del hogar. Diversas culturas prepararon herbarios o manuales sobre las plantas y su uso. Sin embargo, no existe información confiable sobre el momento en que los seres humanos comenzaron a poner sustancias vegetales aromáticas a la comida a | **Oraciones de desarrollo** |
| manera de condimento. Algunos de los primeros registros es la de los califas de Bagdad que servían platillos preparados con hierbas y especias con el objetivo de conseguir una rica gama de sabores dulces, salados, ácidos y amargos. | **Oración de cierre** |

Cuando esta estructura está completa y un nuevo nodo o tema se desarrolla, es necesario utilizar un punto y aparte para iniciar un nuevo párrafo. Por ejemplo, la continuación del párrafo anterior es el siguiente fragmento.

En el siglo XIII, en Catay, el célebre viajero Marco Polo descubrió que ahí los habitantes comían diferentes tipos de carne preservada con especias. El uso de estas como conservadores se difundió poco a poco y dio origen, en parte, la era de las exploraciones, pues los navegantes europeos querían llegar a los lugares donde se producían las especias.

Como puedes ver los párrafos se van uniendo para formar un texto completo. No obstante, cada párrafo tiene un nodo temático que desarrolla un tema o un aspecto del tema central. Los nodos temáticos de los párrafos anteriores son:

1. Definición y uso de las especias.

2. Difusión de las especias en el mundo.

Recuerda que, por lo general, los textos tienen una forma de reloj de arena donde el párrafo introductorio va de lo general a lo específico. Después, hay párrafos informativos que desarrollan el tema y, por último, se incluye el párrafo de conclusión que sirve para cerrar el tema. Un posible nodo temático para concluir los dos párrafos anteriores sería el uso actual de las especias.

## COHESIÓN Y COHERENCIA

### USO DE CONECTORES

Los conectores son términos o expresiones que unen palabras, ideas, frases, oraciones y párrafos entre sí. Su uso es necesario, pues por medio de ellos se establece una redacción más fluida, organizada y coherente, lo que favorece la buena realización de una lectura y una eficaz comprensión de los textos. Los conectores presentan una función clasificadora y con la utilización adecuada de ellos se da una correcta conexión entre las diferentes ideas.

Los conectores pueden ser simples (aquellos formados por una sola palabra) o compuestos (aquellos conformados por dos o más términos).

**¿Cómo se clasifican los conectores?**

**De adición o aditivos.**

Y, además, también, así mismo, asimismo, más, aún, ahora bien, del mismo modo, agregando a lo anterior, por otra parte, de igual manera, igualmente, de la misma manera, es más, en esa misma línea, de igual forma, por añadidura, más aún, incluso, hasta, para colmo...

**De contraste u oposición.**

Pero, inversamente, a pesar de todo, al contrario, de lo contrario, empero, sin embargo, aunque, en comparación con, mientras que, por otra parte, no obstante, por el contrario, aun cuando, sino, de otra manera, por otro lado, en contraste con, antes bien, en cambio, de otra parte, con todo, aun así, ahora bien, de cualquier modo...

**De causa/efecto o causativos/consecutivos.**

Porque, a causa de, debido a que, gracias a, por culpa de, por causa de, pues, puesto que, por consiguiente, por eso, por esta razón, de ahí que, por lo tanto, de modo que, se infiere que, en consecuencia, por este motivo, según, entonces, en consecuencia, por ende, por tal motivo, por tanto, así pues, por lo que sigue, resulta que, de manera que, luego, así que, en ese sentido, de tal forma que, además, en efecto...

#### Ejemplo

Completa las siguientes oraciones con base en los nexos que se presentan en la tabla. Estas palabras les dan cohesión a los textos. Toma en cuenta la puntuación en las oraciones para resolver el ejercicio.

| Agregar información | Contraste | Consecuencia | Temporales | Causa |
|---|---|---|---|---|
| y, e, ni | Pero, sino, más, | Luego, así que, así pues | *cuando, *mientras | *Porque, *ya que |
| Además Incluso | Sin embargo, No obstante | Por lo tanto Por eso | *en cuanto, *una vez que | *debido a, *a causa de |

1. Javier es un gran artista _______tiene un gran talento.
a) y
b) sino
c) por eso
d) cuando

Respuesta A
Esta es una oración coordinada, donde la segunda parte solo agrega información sobre Javier.

2. _______ Javier tiene un gran talento, no ha recibido un ascenso.
a) Sin embargo
b) mas
c) pero
d) A pesar de que

Respuesta D
Esta oración tiene una relación de contraste. La opción D es la única que puede iniciar la oración.

3. _______ Javier tiene un gran talento, recibió un ascenso.
a) Mientras
b) Incluso
c) Puesto que
d) En cuanto

Respuesta C
Esta oración establece una relación de causa-efecto.

4. Javier recibió un ascenso. ______, está preparando una celebración.
a) Porque
b) Mientras
c) Debido a
d) Por eso

Respuesta D
Esta oración también es de causa-efecto. En esta oración primero aparece la causa y la única opción que presenta el efecto es D.

5. _______ Javier reciba un ascenso, estará preparando una celebración.
a) Pues
b) En cuanto
c) Ya que
d) Así que

Respuesta B
Esta oración tiene una relación temporal; por lo que la única opción es posible es B.

## Ejemplo

**Instrucciones:** Esta sección contiene textos cuya redacción puede cambiarse o corregirse. Lee el texto y selecciona la respuesta que contiene la opción que mejore la redacción. Responde los ejercicios con base en el siguiente texto.

(1) Los antecedentes más remotos de los números se encontraron en el Medio Oriente hace treinta mil años. (2) Estos son líneas marcadas como pequeños cortes en huesos de animales y otras superficies para llevar la cuenta tal vez de ciclos lunares, o quizá de animales o plantas. (3) Este sistema todavía no tenía un concepto del valor de acuerdo con la posición de los elementos que lo integran_________ esta sí es una característica central de nuestro sistema numérico. (4) Los números son la base de las matemáticas. (5) El primer sistema que asigna un valor de acuerdo con la posición de cifras diferenciadas es el sistema sexagesimal desarrollado en Mesopotamia, el cual incluía un subsistema para contar diferentes objetos. (6) EL sistema decimal más antiguo que se conoce fue desarrollado en Egipto alrededor del año 3100 a.C., y de este se derivó el sistema numérico que a la fecha conocemos. (7) El cero tiene un origen distinto. (8) Las evidencias más remotas del uso que hoy le damos como un signo especial proceden de la zona olmeca, donde quizá se originó en el siglo IV a.C. (9) Para el año 40 ya había sido adoptado por los mayas. (10) Su introducción hizo posible configurar las matemáticas tal como en la actualidad las entendemos.

1. Selecciona la oración que MEJOR inicie el texto.
a) No se sabe con certeza hace cuánto tiempo que los humanos comenzaron a usar los números.
b) Los números más antiguos que se conocen fueron usados por los chinos y luego fueron adoptados por los japonese.
c) Los números son objetos matemáticos que permiten contar, medir y realizar otras operaciones matemáticas.
d) En la antigüedad existía la misma necesidad de comunicarse usando números para expresar a las cantidades y la distancia.

Respuesta C
El texto inicia con una definición sobre los números que es el tema del que trata.

2. Selecciona la oración que NO corresponde.
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6

Respuesta B
A pesar de que la oración trata sobre los números, el insertar la oración 4 en esta parte del texto rompe con la coherencia.

3. Selecciona la oración donde debe iniciar un nuevo párrafo.
a) 7
b) 8
c) 9
d) 10

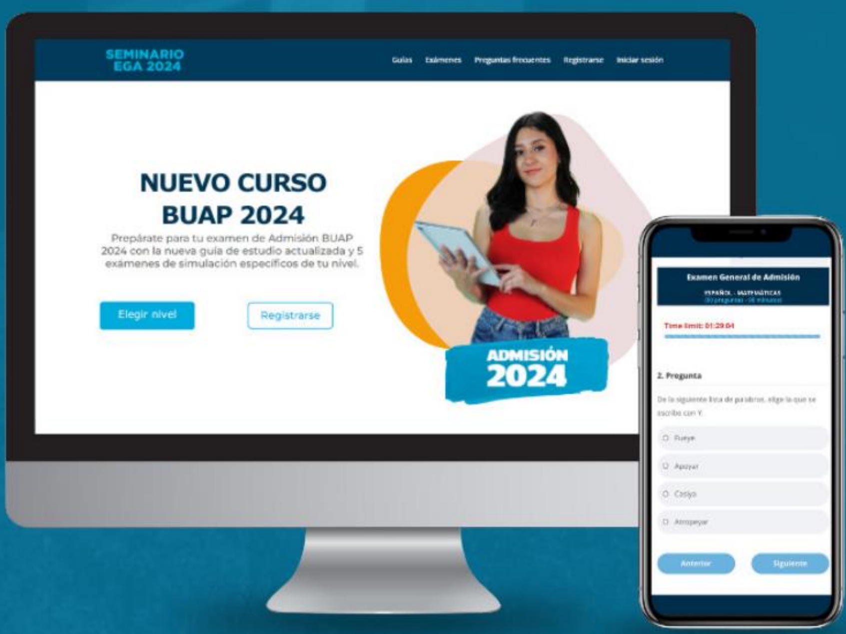
Respuesta A
A partir de esta oración inicia el nodo temático sobre el cero.

4. Seleccione la palabra que MEJOR complete la oración 3.
a) aunque
b) sino
c) y
d) pues

Respuesta A
Esta oración presenta una relación de contraste. Por eso, la única opción posible es “aunque”.

¡Felicidades aspirante, has concluido la guía de estudio para tu examen de admisión BUAP 2024!

El último paso para completar tu preparación es poner a prueba tus conocimientos contestando tus cinco exámenes de simulación dentro de la plataforma **Seminario EGA.**




www.seminarioega.com

## NOTAS